

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 6

Serie nona

1° Giugno 1953

A General Theory of the Second Quantization Methods.

M. SCHÖNBERG

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 4 Febbraio 1953)

Summary. — It is shown that the second quantization methods are a general mathematical technique applicable to formalisms involving linear equations of change, differential with respect to the time variable. The ordinary second quantization formalism for systems of bosons or fermions, and the «second quantization» of the classical theory developed by the author are obtained as particular cases of the general methods. There are several ways of applying the second quantization methods to the same linear problem, which lead to different formalisms. A very simple kind of second quantization is applied to the Schrödinger equation of an arbitrary mechanical system in order to develop a new treatment of the statistical quantum mechanics (the Gibbs second quantization). In this way a straightforward method of introducing the Gibbs ensembles and grand ensembles is obtained. The entropy is discussed with the Gibbs second quantization. Some ergodic theorems of the general second quantization and the quantum mechanics are derived.

1. — Introduction.

The first application of a second quantization method was made by DIRAC⁽¹⁾ in the quantum theory of systems of non interacting bosons. JORDAN and KLEIN⁽²⁾ extended Dirac's method to the case of interacting bosons and JORDAN and WIGNER⁽³⁾ showed that a second quantization formalism can also be developed for interacting fermions. The technique of second

⁽¹⁾ P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc.*, A **114**, 243 (1927).

⁽²⁾ P. JORDAN and O. KLEIN: *Zeits. f. Phys.*, **45**, 751 (1927).

⁽³⁾ P. JORDAN and E. WIGNER: *Zeits. f. Phys.*, **47**, 631 (1928).

quantization was considerably improved by FOCK ⁽⁴⁾ and JORDAN ⁽⁵⁾, in the sense of simplifying the passage from the formalism in configuration space to that of second quantization. We have shown recently ⁽⁶⁾ that the methods of second quantization can also be applied to the classical mechanics, by using the first order linear partial differential equation for the integrals of the motion (Liouville equation of the classical statistical mechanics) as the wave equation submitted to the «second quantization» procedure. In this case the denomination of second quantization is clearly inadequate, since the Planck constant does not appear in the theory. The results of reference (6) indicate that the second quantization method is a mathematical technique which can be applied to linear differential equations others than the wave equations of the quantum theory. In the present paper we shall prove that the second quantization methods can be applied to any linear equation of the form

$$(1) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = K_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n),$$

Ψ_n being a function of n similar sets τ_i of r variables $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}$, continuous or discrete, and $K_n(t; \tau)$ a linear operator of the form

$$(2) \quad K_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{\alpha!} \sum'_{l_1, l_2, \dots, l_\alpha} K^{(\alpha)}(t; \tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \dots, \tau_{l_\alpha}) \quad (s \leq n),$$

\sum' denoting that the summation is taken over different values of $l_1, l_2, \dots, l_\alpha$ and the $K^{(\alpha)}(t; \tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \dots, \tau_{l_\alpha})$ being linear operators symmetrical with respect to the $\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \dots, \tau_{l_\alpha}$. We shall treat all the x as continuous variables for the sake of simplicity, but it will be obvious that the modifications necessary when some of the x are discrete are of a trivial nature. We shall assume that the $x_1^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}$ are the coordinates of a point τ_i in a r dimensional space Ω and we shall denote by $d\tau$ the element of volume in Ω .

The basic operators of the «second quantization» are the hermitian conjugated $\psi(\tau)$ and $\psi^*(\tau)$ characterized by the following commutation rules:

$$(3) \quad [\psi(\tau), \psi^*(\tau')]_{\pm} = \delta(\tau - \tau'), \quad [\psi(\tau), \psi(\tau')]_{\pm} = [\psi^*(\tau), \psi^*(\tau')]_{\pm} = 0,$$

$$(4) \quad \delta(\tau - \tau') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots \delta(x_r - x'_r),$$

$$(5) \quad [A, B]_{\pm} = AB \pm BA.$$

(4) V. FOCK: *Zeits. f. Phys.*, **75**, 522 (1932).

(5) P. JORDAN: *Zeits. f. Phys.*, **75**, 648 (1932).

(6) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 1139 (1952); **10**, 419 (1953).

The signs + and - correspond to two different forms of the «second quantization». In the ordinary second quantization they correspond to the cases of bosons (-) and fermions (+). We shall introduce the operators \mathcal{K}_α and \mathcal{K}

$$(6) \quad \mathcal{K}_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_1) \psi^*(\tau_2) \dots \psi^*(\tau_\alpha) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_\alpha) \{ \psi(\tau_\alpha) \psi(\tau_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau_1) \} d\tau_1 \dots d\tau_\alpha,$$

$$(7) \quad \mathcal{K} = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{K}_\alpha$$

and the functionals χ defined by the equation:

$$(8) \quad i \frac{d\chi}{dt} = \mathcal{K}\chi.$$

The general solution of (8) is given by a series of the form (Fock expansion)

$$(9) \quad \chi(t) = \Psi_0 \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{\Omega} \Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k) \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k,$$

χ_0 being a functional to be defined later and

$$(10) \quad \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \psi^*(\tau_1) \psi^*(\tau_2) \dots \psi^*(\tau_k) \chi_0.$$

The Ψ_k are solutions of equation (1).

The operator N_{op}

$$(11) \quad N_{\text{op}} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) \psi(\tau) d\tau$$

has the eigenvalues 0, 1, 2, 3 ... (∞). N_{op} is the operator for the number of particles in the usual form of second quantization, as well as in the theory of reference (6). χ_0 is the eigenfunctional of N_{op} corresponding to the eigenvalue 0, with a suitable normalization

$$(12) \quad N_{\text{op}} \chi_0 = 0,$$

$$(13) \quad \int_{\mu\text{-space}} \chi_0^* \chi_0 d\mu = 1,$$

the integration in (13) being performed with respect to the variables involved in χ_0 . χ_0 is the wave functional of the vacuum in the usual forms of second quantization. The $\chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ are also eigenfunctionals of N_{op}

$$(14) \quad N_{\text{op}} \chi_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = k \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k),$$

hence each term of the series in the right hand side of (9) is an eigenfunctional of N_{op}

$$(15) \quad N_{\text{op}} \int_{\Omega} \Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k) \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k = \\ = k \int_{\Omega} \Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k) \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

When χ satisfies the condition

$$(16) \quad N_{\text{op}} \chi = k \chi, \quad (k = \text{positive integer})$$

there is only one term in the right hand side of (9)

$$(17) \quad \chi(t) = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{\Omega} \Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k) \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k,$$

and

$$(18) \quad \Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k) \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{k!}} \psi(\tau_k) \psi(\tau_{k-1}) \dots \psi(\tau_1) \chi(t).$$

Thus we get a solution of (1) from any solution of (8) satisfying the condition (16). This solution of (1) is symmetrical or anti-symmetrical, according to the sign in the commutation rules (3). Conversely, with any symmetrical solution of (1) we can form a solution (17) of (8), with the sign minus in the commutation rules, and with any anti-symmetrical solution of (1) we can form a solution (17) of (8), with the sign plus in the commutation rules, the condition (16) being satisfied in both cases.

The proofs of the above results are given in sections 2 and 3. These results contain as particular cases the fundamental theorems of the usual second quantization as well as those of reference (6). There are however other interesting applications. Let H be the hamiltonian of a quantal system Σ of any

kind, by taking

$$(19) \quad K^{(1)} = \hbar^{-1}H, \quad K^{(2)} = K^{(3)} = \dots = 0, \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

we get a new kind of a second quantization formalism describing statistical ensembles. Let us assume that at the time 0 it is only known that the system Σ is in one of the states described by the time independent and orthogonal wave functions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$. We can extend the set $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ by including other orthogonal functions, in order to obtain a complete set of orthogonal functions φ_λ ($\lambda = 1, 2, \dots (\infty)$), and take the occupation numbers N'_λ of those states as variables to describe the « quantized field ». The wave functional $\chi(0)$ is then

$$(20) \quad \chi(0) = \delta_{N'_1,1} \delta_{N'_2,1} \dots \delta_{N'_p,1} \prod_{\lambda=p+1}^{\infty} \delta_{N'_\lambda,0}.$$

By determining the wave functional $\chi(t)$ we can compute the probabilities of the various distributions of the p similar systems between the various states φ_λ at the time t . It will be shown in section 6 that the wave functional $\chi(t)$ whose initial value is

$$(21) \quad \chi(0) = \delta_{N'_1, n_1} \delta_{N'_2, n_2} \dots = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \delta_{N'_\lambda, n_\lambda},$$

describes the same incompletely specified state of motion of a system Σ as the von Neuman density matrix $\langle \tau | R(t) | \tau' \rangle$ whose initial value is:

$$(22) \quad \langle \tau | R(0) | \tau' \rangle = \sum_{\lambda=1}^{\infty} n_\lambda \varphi_\lambda(\tau) \varphi_\lambda^*(\tau').$$

This new kind of second quantization gives the most direct quantal method of introducing the ensembles and grand ensembles of the statistical technique of Gibbs. We shall call it the Gibbs second quantization. The grand ensembles are described by wave functionals χ which are not eigenfunctionals of N_{op} .

The formalism of the Gibbs second quantization becomes particularly interesting in the representation in which the « emission » operators $\psi^*(\tau)$ are diagonalized, the ψ^* -representation. Such a representation was already used by Fock ⁽⁷⁾ in the quantum electrodynamics, it is closely related to the Fock ⁽⁸⁾

⁽⁷⁾ V. FOCK: *Phys. Zeits. Sow. Un.*, **6**, 428 (1934).

⁽⁸⁾ V. FOCK: *Zeits. f. Phys.*, **49**, 339 (1928).

theory of the harmonic oscillator. The use of the ψ^* -representation requires an extension of the ordinary technique of the transformation theory of the quantum mechanics, because the basic commutable operators of the representation are not hermitian. DIRAC⁽⁹⁾ has given an extension of the transformation theory which allows to deal with such generalized representations. The Dirac technique involves contour integration and does not seem to be the most convenient. In section 4 is given a new treatment of the ψ^* -representation, in which contour integration is avoided by the use of methods of the theory of systems of orthogonal functions of complex variables. In the ψ^* -representation the wave functional χ is a functional of a complex function $\psi^*(\tau)$ and the operators \mathcal{R}_α have the form:

$$(23) \quad \mathcal{R}_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_\alpha) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_\alpha) \frac{\delta^\alpha}{\delta \psi^*(\tau_1) \dots \delta \psi^*(\tau_\alpha)} d\tau_1 \dots d\tau_\alpha.$$

The equation (8) for the Gibbs second quantization becomes a first order partial differential equation:

$$(24a) \quad i \frac{d}{dt} \chi[t; \psi^*] = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) K(\tau) \frac{\delta \chi[t; \psi^*]}{\delta \psi^*(\tau)} d\tau.$$

The complex conjugated of $\chi[t; \psi^*]$ is a functional of a function $\psi = (\psi^*)^*$ and satisfies the equation:

$$(24b) \quad -i \frac{d}{dt} \chi^*[t; \psi] = \int_{\Omega} \frac{\delta \chi^*[t; \psi]}{\delta \psi(\tau)} K(\tau) \psi(\tau) d\tau.$$

The product $\chi[t; \psi^*] \chi^*[t; \psi']$ is a functional of the two complex functions ψ^* and ψ' which satisfies a kind of Liouville equation:

$$(24c) \quad i \frac{d}{dt} \bar{\mathcal{Q}}[t; \psi^*, \psi'] = \int_{\Omega} \left\{ \psi^*(\tau) K(\tau) \frac{\delta \bar{\mathcal{Q}}}{\delta \psi^*(\tau)} - \frac{\delta \bar{\mathcal{Q}}}{\delta \psi'(\tau)} K(\tau) \psi'(\tau) \right\} d\tau.$$

The equations (24) play a central role in a generalization of the quantum mechanics recently discussed by us⁽¹⁰⁾. Both (24a) and (24b) are particular cases of (24c), so that $\chi[t; \psi^*]$ and $|\chi[t; \psi^*]|^2$ satisfy the same Liouville equation.

(9) P. A. M. DIRAC: *Comm. Dub. Inst. f. Adv. Stud.*, A, 1 (1943).

(10) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, 10, 350 (1953).

The relations between the Gibbs second quantization and the von Neumann statistical formalism are discussed in sections 6 and 7. It is shown that a non normalized von Neumann operator $R(t)$ can be defined in terms of any normalized solution $\chi(t)$ of the equation (8) of the Gibbs second quantization:

$$(25) \quad \langle \tau' | R(t) | \tau' \rangle = \int_{\mu\text{-space}} \chi^*(t) \psi^*(\tau') \psi(\tau') \chi(t) d\mu.$$

Thus it becomes possible to apply the von Neumann definition of the entropy to the Gibbs second quantization by means of (25). The entropy thus defined is time independent. An interesting feature of the Gibbs second quantization consists in the possibility of defining a kind of entropy operator $S_{op}^{(q)}$:

$$(26) \quad S_{op}^{(q)} = -k \sum_{\lambda} f_{\lambda} \log f_{\lambda}. \quad (k = \text{Boltzmann constant}).$$

The f_{λ} are the N_{λ}/N_{op} , conveniently defined in order to avoid the difficulties arising from the eigenvalue 0 of N_{op} . The expectation value $\int_{\mu\text{-space}} \chi^*(t) S_{op}^{(q)} \chi(t) d\mu$ has a behaviour similar to that of an entropy. Thus in the case of a wave functional of the type (21) the expectation value of S_{op} coincides with the von Neumann entropy of the assembly described by the density operator (22). The entropy is discussed in section 8.

In section 9 the ordinary second quantization of the quantum mechanics is obtained as a particular case of the general theory. Some new formulas are given. The «second quantization» formalism of the classical mechanics is obtained from the general theory in section 10. It is shown that there is a classical analogue of the Gibbs second quantization.

It is shown in section 11 that in the case of hermitian operators $K^{(\alpha)}$ the general formalism of «second quantization» may be obtained by the application of the ordinary procedure of field quantization to a kind of field in the space Ω described by non linear equations. This approach is particularly interesting in the case of the Gibbs second quantization, because it allows to get the interpretation rules of the statistical formalism from the usual interpretation rules of the theory of the quantized fields. The quantum theory of a field whose quanta are bosons appears as a statistical theory of systems of bosons. From this facts results the possibility of assigning an entropy to a pure state of a field of bosons (*).

Ergodic theorems of the general «second quantization» and of the quantum mechanics are derived in sections 13 and 14. These ergodic theorems give the values of generalized limits for $t = \infty$ of operators $\mathcal{A}(t)$, $A(t)$ of the Heisen-

(*) Prof. PRIGOGINE was led to a similar conclusion by different considerations.

berg representations of the general second quantization and of the quantum mechanics. The generalized Cesàro limits

$$(27a) \quad \mathcal{A}(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt,$$

are discussed in section 13, for hamiltonians \mathcal{K} with a pure point spectrum. The case of general spectra is discussed in section 14 by means of the Abel generalized limit:

$$(27b) \quad \mathcal{A}_{ab}(\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \mathcal{A}(t) dt.$$

The ergodic theorems allow to give a justification of the fundamental postulate of the equal a priori probabilities, without the unsatisfactory use of the perturbation theory for long intervals of time. These ergodic theorems differ considerably from those of the usual ergodic theory, developed in the last twenty years in connection with the classical mechanics and the theory of stochastic processes, although the generalized limits are used in both.

2. — The general formalism of second quantization.

It follows from the commutation rules (3) that

$$(28) \quad [\varrho(\tau), \psi^*(\tau_1)\psi^*(\tau_2) \dots \psi^*(\tau_k)] = \sum_{l=1}^k \delta(\tau - \tau_l) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k),$$

with

$$(29) \quad \varrho(\tau) = \psi^*(\tau)\psi(\tau)$$

and

$$(30) \quad [A, B] = AB - BA.$$

By taking the hermitian conjugates of both sides of (28) we get:

$$(31) \quad [\psi(\tau_k)\psi(\tau_{k-1}) \dots \psi(\tau_1), \varrho(\tau)] = \sum_{l=1}^k \delta(\tau - \tau_l) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1).$$

Since

$$(32) \quad N_{\text{op}} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau)\psi(\tau) d\tau,$$

we get from (28) and (31):

$$(33a) \quad [N_{\text{op}}, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k)] = k\psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k),$$

$$(33b) \quad [N_{\text{op}}, \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1)] = -k\psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1).$$

We get from (6) and (7), by taking into account (33):

$$(34) \quad [N_{\text{op}}, \mathcal{K}_\alpha] = 0, \quad [N_{\text{op}}, \mathcal{K}] = 0.$$

Let χ be a solution of (8). We have

$$(35) \quad i \frac{d}{dt} (N_{\text{op}} \chi) = i N_{\text{op}} \frac{d\chi}{dt} = N_{\text{op}} \mathcal{K} \chi = \mathcal{K} (N_{\text{op}} \chi),$$

so that $N_{\text{op}} \chi$ is also a solution of (8). We shall now prove that the condition (16) will be satisfied for all t if it is for a particular value t_0 , provided the equation (8) determines $\chi(t)$ for all t when $\chi(t_0)$ is given, as will be always assumed. $N_{\text{op}} \chi(t)$ must coincide with $k\chi(t)$, because both are solutions of (8) and have the same value for $t = t_0$.

The proof that the eigenvalues of N_{op} are $0, 1, 2, \dots (\infty)$ is the same as in the Dirac-Jordan second quantization (see for instance reference (6), section 4). The same considerations given in sections 4 and 5 of reference (6) are applicable in the present case and thus we can establish that the $\chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ constitute a complete orthonormal set. From this follows the possibility of expanding any functional $\chi(t)$ in a series of the type (9).

In order to show that the coefficients $\mathcal{V}_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ in the expansion (9) of the solutions of (8) do satisfy equations of the form (1), we shall need the following equation

$$(36) \quad \begin{aligned} [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k)] &= \sum_{\substack{l_1 < l_2 < \dots < l_\alpha \\ l_1, l_2, \dots, l_\alpha = 1, 2, \dots, k}} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_\alpha}) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1))^* + \\ &+ \sum_{\substack{l_1 < l_2 < \dots < l_{\alpha-1} \\ l_1, l_2, \dots, l_{\alpha-1} = 1, 2, \dots, k}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-1}}, \tau'_1) \{ \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_1) d\tau'_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{l_1 < l_2 < \dots < l_{\alpha-2} \\ l_1, l_2, \dots, l_{\alpha-2} = 1, 2, \dots, k}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-2}}, \tau'_1, \tau'_2) \{ \psi(\tau'_2) \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \cdot \\ &\cdot \psi(\tau'_2) \psi(\tau'_1) d\tau'_1 d\tau'_2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{(\alpha-1)!} \sum_{l_1=1}^k \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \tau'_1, \dots, \tau'_{\alpha-1}) \{ \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \cdot \\ &\cdot \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) d\tau'_1 \dots d\tau'_{\alpha-1}, \end{aligned}$$

$K^{(\alpha)*}$ denoting the adjoint or hermitian conjugated of the operator $K^{(\alpha)}$. When $\alpha > k$ the first $\alpha - k$ terms in the right hand side of (36) do not exist. This

equation is satisfied for $k = 1$, as a consequence of (6) and (3):

$$(37) \quad [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_1)] = \\ = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_1, \tau'_1, \dots, \tau'_{\alpha-1}) \{ \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) d\tau'_1 \dots d\tau'_{\alpha-1}.$$

Since

$$(38) \quad [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k)] = [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{k-1})] \psi^*(\tau_k) + \\ + \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{k-1}) [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_k)] = [\mathcal{K}_\alpha, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{k-1})] \psi^*(\tau_k) + \\ + \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_k, \tau'_1, \dots, \tau'_{\alpha-1}) \{ \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \cdot \\ \cdot \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) d\tau_1 \dots d\tau'_{\alpha-1},$$

and

$$(39) \quad \frac{1}{p!} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha-p}=1, \dots, k-1}^{l_1 < \dots < l_{\alpha-p}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-p}}, \tau'_1, \dots, \tau'_p) \cdot \\ \cdot \{ \psi(\tau'_p) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_{k-1}) \dots \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_p) \dots \psi(\tau'_1) d\tau'_1 \dots d\tau'_p \psi^*(\tau_k) = \\ = \frac{1}{p!} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha-p}=1, \dots, k-1}^{l_1 < \dots < l_{\alpha-p}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-p}}, \tau'_1, \dots, \tau'_p) \cdot \\ \cdot \{ \psi(\tau'_p) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_p) \dots \psi(\tau'_1) d\tau'_1 \dots d\tau'_p + \\ + \frac{1}{(p-1)!} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha-p}=1, \dots, k-1}^{l_1 < \dots < l_{\alpha-p}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-p}}, \tau_k, \tau'_1, \dots, \tau'_{p-1}) \cdot \\ \cdot \{ \psi(\tau'_{p-1}) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_{p-1}) \dots \psi(\tau'_1) d\tau'_1 \dots d\tau'_{p-1},$$

the validity of (36) for k follows from its validity for $k-1$. Therefore we have proven (36) for all the values of k and α . We get from (36) and (10) the following relation:

$$(40) \quad \mathcal{R}\chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_k) \mathcal{R}\chi_0 + \\ + \sum_{\alpha=1}^s \text{or } k \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha}=1, \dots, k}^{l_1 < \dots < l_{\alpha}} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha}}) \chi_k^*(\tau_1, \dots, \tau_k))^* + \\ + \sum_{\alpha=1}^{s \text{ or } k+1} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha-1}=1, \dots, k}^{l_1 < \dots < l_{\alpha-1}} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_{\alpha-1}}, \tau_1) \{ \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \psi(\tau'_1) \cdot \\ \cdot \chi_0 d\tau'_1 + \dots + \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\Omega} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \tau'_1, \dots, \tau'_{\alpha-1}) \{ \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) \psi(\tau_k) \dots \psi(\tau_1) \})^* \cdot \\ \cdot \psi(\tau'_{\alpha-1}) \dots \psi(\tau'_1) \chi_0 d\tau'_1 \dots d\tau'_{\alpha-1}.$$

By taking into account (33b) we get

$$(41) \quad N_{\text{op}} \psi(\tau) \chi_0 = -\psi(\tau) \chi_0$$

and, since N_{op} has no negative eigenvalues, we have

$$(42) \quad \psi(\tau) \chi_0 = 0$$

and, (40) can be simplified:

$$(43) \quad \mathcal{R} \chi_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \sum_{\alpha=1}^{s \text{ or } k} \sum_{l_1, \dots, l_\alpha=1, \dots, k}^{l_1 < \dots < l_\alpha} (K^{(\alpha)*}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_\alpha}) \chi_k^*(\tau_1, \dots, \tau_k))^*.$$

By introducing the expansion (9) into (8) and taking into account (43) we get the equations for the:

$$(44a) \quad i \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = 0,$$

$$(44b) \quad i \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{l_1, \dots, l_\alpha=1, \dots, k}^{l_1 < \dots < l_\alpha} K^{(\alpha)}(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_\alpha}) \Psi_k(\tau_1, \dots, \tau_k), \quad (k < s)$$

$$(44c) \quad i \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = K_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \Psi_k(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (k \geq s)$$

Until now we have not assumed that the $K^{(\alpha)}$ are hermitian. We made only use of the adjoints $K^{(\alpha)*}$ and of the relation

$$(45) \quad (K^{(\alpha)*})^* = K^{(\alpha)}.$$

The case of hermitian $K^{(\alpha)}$ is particularly important because of the conservation law

$$(46) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Psi_k(t; \tau_1, \dots, \tau_k)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_k = 0,$$

which allows to define a probability distribution of density $|\Psi_k(\tau_1, \dots, \tau_k)|^2$. It is easily seen that the hermiticity of the $K^{(\alpha)}$ implies that of the \mathcal{R}_α . It is thereby possible to introduce probability distributions attached to the solutions of (8), since:

$$(47) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mu\text{-space}} |\chi(t)|^2 d\mu = 0.$$

3. - We must now examine the methods of integration in the μ -space. The simplest way of introducing the integral in the μ -space consists in taking a discrete and complete orthonormal set of functions $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, ... and expanding $\psi(\tau)$ and $\psi^*(\tau)$ as follows:

$$(48) \quad \psi(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \varphi_{\lambda}(\tau), \quad \psi^*(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^* \varphi_{\lambda}^*(\tau).$$

The a and a^* have the commutation rules

$$(49) \quad [a_{\lambda}, a_{\lambda'}^*]_{\pm} = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [a_{\lambda}, a_{\lambda'}]_{\pm} = [a_{\lambda}^*, a_{\lambda'}^*]_{\pm} = 0$$

and the operators N_{λ}

$$(50) \quad N_{\lambda} = a_{\lambda}^* a_{\lambda},$$

have the eigenvalues 0 and 1 or 0, 1, 2, ... (∞) when the signs in the commutation rules are $+$ and $-$, respectively, as well known (see the section 4 of reference (6)). The N_{λ} are a complete set of commutable operators and the functional χ can be taken as a function of their eigenvalues N'_{λ} . In this case we have simply:

$$(51) \quad \int_{\mu\text{-space}} \chi_1^* \chi_2 d\mu = \sum_{N'} \chi_1^*(N'_1, N'_2, \dots) \chi_2(N'_1, N'_2, \dots).$$

In this representation the wave functional of the vacuum is obviously:

$$(52) \quad \chi_0(N') = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \delta_{N'_{\lambda}, 0}.$$

The $\chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ can be expanded as follows:

$$(53) \quad \chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \chi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \varphi_{\lambda_1}^*(\tau_1) \dots \varphi_{\lambda_n}^*(\tau_n),$$

$$(54) \quad \chi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = a_{\lambda_1}^* \dots a_{\lambda_n}^* \chi_0.$$

It is easily seen that

$$(55) \quad \chi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(+)} = \pm g_+(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \delta_{\lambda_1, 1} \dots \delta_{\lambda_n, 1} \prod_{\lambda \neq \lambda_1, \dots, \lambda_n} \delta_{N'_{\lambda}, 0},$$

$g_+(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ being equal to 1 when all the $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are different and otherwise equal to 0. When the sign in the commutation rules is — there will in general be s_1 of the $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ equal to λ'_1 , s_2 equal to λ'_2 , ..., s_j equal to λ'_j with $s_1 + s_2 + \dots + s_j = n$. In this case we have:

$$(56) \quad \chi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(-)} = \sqrt{g_-(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \delta_{N'_{\lambda'_1}, s_1} \delta_{N'_{\lambda'_2}, s_2} \dots \delta_{N'_{\lambda'_j}, s_j} \prod_{\lambda \neq \lambda'} \delta_{N'_{\lambda}, 0},$$

$$(57) \quad g_-(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = s_1! s_2! \dots s_j!.$$

It is easily seen that the $\chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ are normalized as follows:

$$(58) \quad (\chi_n^{(\pm)}(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi_n^{(\pm)}(\tau'_1, \dots, \tau'_n)) = \int_{\mu\text{-space}} \chi_n^{(\pm)*}(\tau_1, \dots, \tau_n) \chi_n^{(\pm)}(\tau'_1, \dots, \tau'_n) d\mu = \\ = n! \delta_n^{(\pm)}(\tau, \tau') \delta_{n,n'},$$

$$(59) \quad \delta_n^{(-)}(\tau, \tau') = \frac{1}{n!} \sum_{\text{permut. } k} \delta(\tau_1 - \tau'_{k_1}) \delta(\tau_2 - \tau'_{k_2}) \dots \delta(\tau_n - \tau'_{k_n}),$$

$$(60) \quad \delta_n^{(+)}(\tau, \tau') = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \delta(\tau_1 - \tau'_1) & \delta(\tau_1 - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_1 - \tau'_n) \\ \delta(\tau_2 - \tau'_1) & \delta(\tau_2 - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_2 - \tau'_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta(\tau_n - \tau'_1) & \delta(\tau_n - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_n - \tau'_n) \end{vmatrix}.$$

It results from (9) and (58) that:

$$(61) \quad \int_{\mu\text{-space}} \chi^* \chi d\mu = \Psi_0^* \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

and also that

$$(62) \quad \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\mu\text{-space}} \chi \chi_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) d\mu = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\mu\text{-space}} \chi_0^* \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \chi d\mu.$$

By taking into account that $\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ is either symmetrical or antisymmetrical we get:

$$(63) \quad \psi(\tau_1) \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_n) \chi_0 d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \\ = n \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau_1, \tau'_1, \dots, \tau'_{n-1}) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_{n-1}) \chi_0 d\tau'_1 \dots d\tau'_{n-1}.$$

Hence

$$\begin{aligned}
 (64) \quad \psi(\tau_2)\psi(\tau_1) \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_n) \chi_0 d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \\
 = n(n-1) \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau_1, \tau_2, \tau'_1, \dots, \tau'_{n-2}) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_{n-2}) d\tau'_1 \dots d\tau'_{n-2},
 \end{aligned}$$

and after n steps we get:

$$\begin{aligned}
 (65) \quad \psi(\tau_n) \psi(\tau_{n-1}) \dots \psi(\tau_1) \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \chi_n(\tau'_1, \dots, \tau'_n) d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \\
 = n! \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi_0.
 \end{aligned}$$

By combining (65) and (17) we obtain equation (18).

The general solution of equation (1) can be expressed in terms of an operator $U_n(t)$ such that:

$$(66) \quad \Psi_n(t) = U_n(t-t_0) \Psi_n(t_0),$$

$U_n(t)$ is determined by the equations:

$$(67) \quad i \frac{d}{dt} U_n(t) = K_n U_n(t) \quad U_n(0) = 1.$$

In a similar way the general solution of (8) can be expressed in terms of an operator $\mathcal{U}(t)$ such that:

$$(68) \quad \chi(t) = \mathcal{U}(t-t_0) \chi(t_0),$$

$\mathcal{U}(t)$ is determined by the equations:

$$(69) \quad i \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t) = \mathcal{K} \mathcal{U}(t) \quad \mathcal{U}(0) = 1.$$

When $n < s$ we shall take:

$$(70) \quad K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\alpha!} \sum'_{i_1, \dots, i_{i_\alpha}} K^{(\alpha)}(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_\alpha}).$$

We shall now prove that the relation between $\mathcal{U}(t)$ and the $U_n(t)$ given in

reference (6) is also valid in the general case we are considering:

$$(71) \quad \mathcal{U}(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n.$$

The P_n are the projection operators on the linear manifolds of the χ -space corresponding to the eigenvalues n of N_{op} :

$$(72) \quad N_{\text{op}} P_n = n P_n, \quad P_n P_{n'} = \delta_{nn'} P_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1.$$

We must prove that the right hand side of (71) satisfies the two equations (69). The proof regarding the second equation (69) is the same given in section 3 of reference (6). In order to show that the first equation (69) is satisfied, we shall use equation (36) and take into account that $N_{\text{op}} P_n \chi$ is equal to $n P_n \chi$ for any χ , so that the product of more than n operators ψ applied to $P_n \chi$ is always 0, as a consequence of (33b). Thus we get:

$$(73) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{n!} \mathcal{K} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n \chi = \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) U_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n \chi = \\ &= \frac{i}{n!} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n \chi. \end{aligned}$$

This equation shows that the series in the right hand side of (71) is a solution of the first equation (69). From (71) we get again the expansion (9) with:

$$(74) \quad \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = U_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \Psi_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n),$$

$$(75) \quad \Psi_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) P_n \chi(0).$$

Equation (74) is equivalent to the set (44). Therefore equation (71) describes in the most complete way the relations between the «second quantization» formalism and the formalism in the configuration space.

We shall now complete the spectral decomposition of N_{op} by introducing

the projection operators $P(\tau_1, \dots, \tau_n)$:

$$(76) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n)\chi = \frac{1}{n!} \chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \int_{\mu\text{-space}} \chi_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) \chi \, d\mu,$$

$$(77) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) P_0 \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1),$$

$$(78) \quad P_n = \int_{\Omega} P(\tau_1, \dots, \tau_n) \, d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Equation (78) is easily proven by showing that the operator in its right hand side leaves invariant any eigenfunctional $\chi^{(n)}$ of N_{op} corresponding to the eigenvalue n and annihilates all the $\chi^{(n')}$ for $n' \neq n$. We get from (58) the orthogonality relations:

$$(79) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) P(\tau'_1, \dots, \tau'_n) = \delta_{n,n'} \delta_n(\tau, \tau') P(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

It follows from (78) and the third equation (72) that:

$$(80) \quad P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} P(\tau_1, \dots, \tau_n) \, d\tau_1 \dots d\tau_n = 1.$$

4. — The ψ^* -representation.

We shall now develop a special formalism for the case of commutation rules with sign minus. This corresponds to the usual second quantization for bosons in the quantum mechanics. The formalism we shall develop is related to the Fock theory of the harmonic oscillator⁽⁸⁾, which was extended by DIRAC⁽⁹⁾. Our treatment differs from that of the Dirac formalism by the definition of inner products of functions of a complex variable by means of two-dimensional real integrals, instead of the complex contour integrals used by Dirac. Our point of view corresponds to that more usually taken in the theory of orthogonal systems of functions of complex variables (see S. BERGMANN: *The kernel function and conformal mapping* (New York, 1950)).

The commutability of the $\psi^*(\tau)$ at all the points of Ω allows us to take the operator ψ^* as a multiplicative numerical factor. The commutation rules (3) are satisfied by taking $\psi(\tau)$ as the functional derivative with respect

to $\psi^*(\tau)$:

$$(81) \quad \{\psi^*(\tau)\}_{\text{op}} \chi = \psi^*(\tau) \chi, \quad \{\psi(\tau)\}_{\text{op}} \chi = \frac{\delta \chi}{\delta \psi^*(\tau)},$$

$$(82) \quad \frac{\delta}{\delta \psi^*(\tau)} \{\psi^*(\tau') \chi[\psi^*]\} - \psi^*(\tau') \frac{\delta \chi[\psi^*]}{\delta \psi^*(\tau)} = \delta(\tau - \tau') \chi[\psi^*].$$

In this ψ^* -representation the χ are functionals of a complex function of real variables $\psi^*(\tau)$. This representation was already used by Fock (?) in his work in quantum electrodynamics. We shall assume that the functionals χ can be expanded in Volterra series

$$(83) \quad \chi[\psi^*] = \chi[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\delta^n \chi[\psi^*(\tau)]}{\delta \psi^*(\tau_1) \dots \delta \psi^*(\tau_n)} \right\}_{(\psi^*=0)} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

which are the analogue of the Taylor series in functional analysis. The wave functional of the vacuum is simply a constant and, more generally, the eigenfunctionals of N_{op} corresponding to any integer eigenvalue n are polynomial functionals $\chi^{(n)}$ of order n :

$$(84) \quad \chi^{(n)}[\psi^*] = \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \Phi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

$$(85) \quad \psi(\tau) \chi^{(n)}[\psi^*] = \frac{\delta \chi^{(n)}}{\delta \psi^*(\tau)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\Omega} \Phi_n(\tau, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{n-1}) d\tau_1 \dots d\tau_{n-1},$$

$$(86) \quad N_{\text{op}} \chi^{(n)}[\psi^*] = \int_{\Omega} \psi_{\text{op}}^*(\tau) \psi_{\text{op}}(\tau) d\tau \chi^{(n)}[\psi^*] = n \chi^{(n)}[\psi^*].$$

The Volterra series (83) can be written as follows

$$(87) \quad \chi[\psi^*] = \chi[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \Phi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

with

$$(88) \quad \Phi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \left\{ \frac{\delta^n \chi[\psi^*(\tau)]}{\delta \psi^*(\tau_1) \dots \delta \psi^*(\tau_n)} \right\}_{(\psi^*=0)},$$

and by taking into account (86) we see that the Volterra series is essentially the same as the Fock expansion (9), for commutation rules (3) with the sign minus.

The ψ^* -representation is not of the kind ordinarily considered in quantum mechanics, because the basic operators $\psi^*(\tau)$ are not hermitian. Thereby methods of the theory of the orthogonal functions of complex variables must be employed. By introducing the expansion (48) of $\psi^*(\tau)$, χ becomes a function of the complex variables a_λ^* . We shall use the following definition of the inner product of two functions G_1 and G_2 of n complex variables z_1, \dots, z_n :

$$(89) \quad (G_1(z_1, \dots, z_n), G_2(z_1, \dots, z_n)) = \\ = \pi^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \{G_1(z_1, \dots, z_n)\}^* G_2(z_1, \dots, z_n) \exp \left[- \sum_{l=1}^n |z_l|^2 \right] dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n,$$

$$(89a) \quad x_l = \operatorname{Re} z_l, \quad y_l = \operatorname{Im} z_l.$$

It follows from (89) that

$$(90) \quad (z_{l_1}^{r_1}, z_{l_2}^{r_2}) = r_1! \delta_{l_1, l_2} \delta_{r_1, r_2},$$

so that the functions $(r_1! \dots r_n!)^{-1/2} z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n}$ constitute a complete orthonormal set. It is convenient to write:

$$(91) \quad (G_1(z_1, \dots, z_n), G_2(z_1, \dots, z_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{G_1(z_1, \dots, z_n)\}^* G_2(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

The above method of definition of the inner product can be immediately extended to the case of functions depending on a countable infinity of independent complex variables, such as the wave functionals $\chi[\psi^*]$. By introducing the expansion (48) into (87) we get:

$$(92) \quad \chi[\psi^*] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} a_{\lambda_1}^* \dots a_{\lambda_n}^*,$$

$$(92a) \quad A_0 = \chi[0], \quad A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = \int_{\Omega} \Phi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \varphi_{\lambda_1}^*(\tau_1) \dots \varphi_{\lambda_n}^*(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

The inner product of two functionals χ_1 and χ_2 is:

$$(93) \quad (\chi_1, \chi_2) = A_0^{(1)*} A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(1)*} A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(2)}.$$

The $A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ are symmetrical with respect to the indices, so that there are $n!/g_{-(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$ terms in the series in (92), for each set of values of the indices, $g_{-(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$ being defined by (57). There is a cancellation of two factors g_{-} which leads to (93). In particular the normalization condition is:

$$(94) \quad (\chi, \chi) = |A_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} |A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}|^2 = \\ = |\chi(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} |\Phi_n(\tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

The inner product defined by (93) may be considered as obtained by a special kind of integration over the variable ψ^* :

$$(95) \quad (\chi_1[\psi^*], \chi_2[\psi^*]) = \int \{\chi_1[\psi^*]\}^* \chi_2[\psi^*] d\psi^*,$$

$\{G(z_1, \dots, z_n)\}^*$ is an analytic function of z_1^*, \dots, z_n^* when $G(z_1, \dots, z_n)$ is an analytic function of z_1, \dots, z_n . In a similar way $\{\chi[\psi^*]\}^*$ will be treated as a functional of $\psi(\tau)$. The matrix elements of the linear operators in the ψ^* -representation will be denoted by $\langle \psi^* | \mathcal{A} | \psi' \rangle$, in order that the «index» at the right hand side behave as the argument of a χ^* and the «index» at the left hand side as the argument of a χ . Whenever an integration of the special kind (95) occurs there are two arguments in the integrated quantity which behave as a ψ^* and a ψ . Thus the trace of an operator \mathcal{A} will be the integral $\int \langle \psi^* | \mathcal{A} | \psi \rangle d\psi^*$.

The ordinary rules of matrix multiplication must be slightly modified in the ψ^* -representation, in order to take into account that the summation over the «indices» is a $d\psi^*$ integration, in which in one of the factors appears an argument ψ and in the other factor an argument ψ^* . The situation is analogous to that of the tensor calculus in which the summations affect a lower index and an equal higher index.

5. — The Gibbs second quantization.

We shall now consider a quantum mechanical system Σ whose wave function depends on a variable point τ in a certain space Ω . If the Σ system is formed by n spinless particles, its wave function will depend on a point τ of a $3n$ dimensional euclidean space. In the case of a quantized field, the wave functional of the field may be considered as a function of a discrete infinity of variables, τ will then be a point in a suitable sequence space. We shall

assume, as we did until now, that we know how to define an integral over the space Ω , as happens in all the cases of practical importance. The hamiltonian of the system divided by \hbar will be denoted by K . K is a hermitian operator.

In order to get the special kind of second quantization which will be called the Gibbs second quantization, we shall apply the mathematical procedure developed in the preceding sections taking

$$(96) \quad K_1 = K, \quad K_n = 0, \quad \text{for } n > 1$$

with either of the signs in the commutation rules (3). The operator \mathcal{K} is now simply

$$(97) \quad \mathcal{K} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) K \psi(\tau) d\tau,$$

and the equation of type (8) for the wave functional χ becomes:

$$(98) \quad i \frac{d\chi}{dt} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) K \psi(\tau) d\tau \chi.$$

The Fock expansion (9) is

$$(99) \quad \chi(t) = \Psi_0 \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\Omega} \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

the $\Psi_n(t; \tau_1 \dots \tau_n)$ being solutions of the Schrödinger equations for n similar non interacting systems:

$$(100) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{l=1}^n K(\tau_l) \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n).$$

It results from (58) and (99) that:

$$(101) \quad (\chi(t), \chi(t)) = |\Psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

The structure of (99) and (101) shows that $\chi(t)$ describes a grand ensemble $\mathcal{E}(t)$ of systems Σ , i.e. a set whose elements are assemblies α of systems Σ . We can imagine a random extraction of elements α of the set $\mathcal{E}(t)$ with a

probability $\mathcal{P}(t; n)$ of extracting a n -system assembly at the time t . We shall introduce the following rule of physical interpretation:

(I) *The probability of extracting a n -system assembly in a random choice at the time t from the grand ensemble \mathcal{E} described by the normalized wave functional $\chi(t)$ is given by $\langle \chi(t), P_n \chi(t) \rangle = \int_{\Omega} |\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n$, P_n being the projection operator of N_{op} corresponding to the eigenvalue n . The wave function of the n -system assembly is $\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$.*

Having extracted an assembly of n -systems from $\mathcal{E}(t)$, we can make measurements of the physical quantities of the systems of the assembly, which are not interacting, as shown by equations (100). The probabilities of the different possible values of a quantity A are given by the ordinary interpretation rules of the quantum mechanics. For instance, when it is possible to define an element of volume in Ω , the probability of finding the n systems of the assembly in the elements of volume $d\tau_1 \dots d\tau_n$ is $|\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n / \mathcal{P}(t; n)$.

The wave function $\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ of the assembly is either symmetrical in the τ_1, \dots, τ_n , when the sign minus is taken in the commutation rules (3), or anti-symmetrical, when the sign plus is taken. In both cases $|\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2$ is symmetrical and the n systems are not distinguished.

Let us consider an hermitian operator A describing some physical quantity of a system Σ . We shall introduce now the spectral decomposition of A :

$$(102) \quad A = \sum_{A'} A' p_{A'} \quad \left(\sum_{A'} p_{A'} = 1, \quad p_{A'} p_{A''} = p_{A'} \delta_{A' A''} \right).$$

The A' are the eigenvalues of A and the $p_{A'}$ the corresponding projection operators. The probability of finding the values A'_1, \dots, A'_n in measurements made on the n systems of the assembly at the time t is

$$\int_{\Omega} \Psi_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) p_1(\tau_1) \dots p_n(\tau_n) \Psi(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n / \mathcal{P}(t; n)$$

according to the rules of the quantum mechanics. For the purposes of the statistical quantum mechanics it is convenient to consider the expectation value of the number of systems in which a measurement of a quantity A at the time t gives the values A' . In this expectation value there is of course an averaging with respect to the possible number of systems in the assemblies α of the grand ensemble $\mathcal{E}(t)$. We shall prove that this expectation value is $\langle \chi(t), \mathcal{P}_{A'} \chi(t) \rangle$, with a normalized $\chi(t)$, as a consequence of the interpretation rule (I), with

$$(103) \quad \mathcal{P}_{A'} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_{A'} \psi(\tau) d\tau.$$

Indeed, we have

$$\begin{aligned}
 (104) \quad & (\chi(t), \mathcal{P}_A \chi(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi(t), \mathcal{P}_A P_n \chi(t)) = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \Psi_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \Psi_n(t; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \cdot \\
 & \cdot \left(\chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_A \psi(\tau) d\tau \chi_n(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \right) d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} \left\{ \Psi_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \sum_{l=1}^n p_A(\tau'_l) \Psi_n(t; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \right\} \cdot \\
 & \cdot (\chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi_n(\tau'_1, \dots, \tau'_n)) d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \Psi_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \sum_{l=1}^n p_A(\tau_l) \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.
 \end{aligned}$$

In the derivation of (104) we used the following formula: ,

$$(105) \quad \mathcal{B} \chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{l=1}^n \{B(\tau_l) \chi_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n)\}^*$$

$$(106) \quad \mathcal{B} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) B(\tau) \psi(\tau) d\tau \quad (B = B^*).$$

It follows from the commutation rules (3) that:

$$\begin{aligned}
 (107) \quad & [\mathcal{B}, \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n)] = \{B(\tau_1) \psi(\tau_1)\}^* \psi^*(\tau_2) \dots \psi^*(\tau_n) + \\
 & + \psi^*(\tau_1) \{B(\tau_2) \psi(\tau_2)\}^* \psi^*(\tau_3) \dots \psi^*(\tau_n) + \dots + \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{n-1}) \{B(\tau_n) \psi(\tau_n)\}^* = \\
 & = \left\{ \sum_{l=1}^n B(\tau_l) \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \right\}^*.
 \end{aligned}$$

Equation (105) follows immediately from (107) and (10). We get from (107)

$$(108) \quad \mathcal{B} \chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{l=1}^n B(\tau_l) \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \right\} \chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

and thus we obtain a formula more general than (104)

$$(109) \quad (\chi(t), \mathcal{B} \chi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \Psi_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \sum_{l=1}^n B(\tau_l) \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

It results from (102) and the above derived expectation value of the number of systems in which the measurement gives a value A' of A , that the expectation value of a quantity A in the state of the grand ensemble described by the normalized $\chi(t)$ is $(\chi(t), \mathcal{A}\chi(t))$, \mathcal{A} being the χ -operator formed with A by the rule (106). Thus we get the second rule of physical interpretation:

(II) *The expectation value of a physical quantity A of the system Σ in the state of the grand ensemble $\mathcal{E}(t)$ described by the normalized wave functional $\chi(t)$ is $(\chi(t), \mathcal{A}\chi(t))$.*

The $\mathcal{P}_{A'}$ are closely related to the operators N_λ defined by (50). Indeed, let the p_λ be the projection operators associated to the functions $\varphi_\lambda(\tau)$ of a complete orthonormal set

$$(110) \quad p_\lambda \Psi(\tau) = \varphi_\lambda(\tau) \int_{\Omega} \varphi_\lambda^*(\tau') \Psi(\tau') d\tau',$$

we have

$$(111) \quad \mathcal{P}_\lambda = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_\lambda \psi(\tau) d\tau = \sum_{\lambda', \lambda''} a_{\lambda'}^* a_{\lambda''} \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) p_\lambda \varphi_{\lambda''}(\tau) d\tau = a_\lambda^* a_\lambda,$$

hence:

$$(112) \quad \mathcal{P}_\lambda = N_\lambda.$$

When the eigenvalues of A are degenerated, the corresponding projection operators $p_{A'}$ are sums of one dimensional projection operators $p_{A'}^{(\alpha)}$ corresponding to a complete set of orthonormal functions for the eigenvalue A' :

$$(113) \quad p_{A'} = \sum_{\alpha} p_{A'}^{(\alpha)} \quad p_{A'}^{(\alpha)} p_{A'}^{(\beta)} = p_{A'}^{(\alpha)} \delta_{\alpha, \beta}.$$

$$(114) \quad \mathcal{P}_{A'} = \sum_{\alpha} \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_{A'}^{(\alpha)} \psi(\tau) d\tau = \sum_{\alpha} N_{A'}^{(\alpha)}.$$

It is convenient to use the following notation:

$$(115) \quad N_{A'} = \mathcal{P}_{A'}.$$

Thus we have:

$$(116) \quad \mathcal{A} = \sum_{A'} A' N_{A'}.$$

The $N_{A'}^{(\alpha)}$ are of the same kind as the N_λ defined by (50). They have the eigenvalues 0 and 1 or 0, 1, 2, ... (∞), for commutation rules with the signs plus and minus, respectively. Thereby the eigenvalues of the $N_{A'}$ are always positive integers or 0. The $N_{A'}^{(\alpha)}$ are operators for the occupation numbers of the pure states $\varphi_{A'}^{(\alpha)}$. $N_{A'}$ is the operator for the occupation number of the mixed state corresponding to the projection operator (or von Neumann density operator) $p_{A'}$. We shall call \mathcal{A} the χ -operator for the physical quantity A . Equation (116) shows in a suggestive way the relation between the Gibbs second quantization and the ordinary quantum mechanics.

In the ordinary form of the statistical quantum mechanics, the condition of a system Σ is described by a von Neumann density operator R

$$(117) \quad R = \sum_{\lambda} w_{\lambda} p_{\lambda}, \quad w_{\lambda} \geq 0$$

the p_{λ} being the one-dimensional projection operators corresponding to the orthonormal states φ_{λ} and the w_{λ} their weights in the mixture R . It is often convenient to normalize these weights:

$$(118) \quad \sum_{\lambda} w_{\lambda} = 1.$$

We can generalize the definition of the $N_{A'}$ in order to get an operator for the occupation number of a mixed state R :

$$(119) \quad N_R = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) R \psi(\tau) d\tau.$$

The Schrödinger equation for the pure states of Σ is replaced by the von Neumann equation in the case of mixed states:

$$(120) \quad i\hbar \frac{dR}{dt} = [H, R] \quad (H = \hbar K).$$

We get from (120):

$$(121) \quad i \frac{d}{dt} N_{R(t)} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) [K, R(t)] \psi(\tau) d\tau = [\mathcal{K}, N_{R(t)}].$$

In the derivation of (121) we used the formula:

$$(122) \quad [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) [A, B] \psi(\tau) d\tau.$$

It follows from the comutation rules (3) that:

$$(123) \quad \mathcal{AB} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(\tau) \psi(\tau) \psi^*(\tau') B(\tau') \psi(\tau') d\tau d\tau' = \\ = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(\tau) B(\tau) \psi(\tau) d\tau + \int_{\Omega} \psi^*(\tau) \psi^*(\tau') A(\tau) B(\tau') \psi(\tau') \psi(\tau) d\tau d\tau'.$$

Equation (122) follows immediately from (123). Equation (122) shows that the χ -operators corresponding to commutable quantities are also commutable. In particular we have:

$$(124) \quad [\mathcal{P}_{A'}, \mathcal{P}_{A''}] = 0. \quad (A', A'' = \text{eigenvalues of } A).$$

The unitary operator of the motion of the Gibbs second quantization for a time independent K is:

$$(125) \quad \mathcal{U}(t) = \exp[-it\mathcal{K}] = \prod_{K'} \exp[-itK'\mathcal{P}_{K'}].$$

The operators which commute with \mathcal{K} are the integrals of the motion. Their expectation values are time independent:

$$(126) \quad (\chi(t), \mathcal{A}\chi(t)) = (\chi(0), \exp[it\mathcal{K}]\mathcal{A}\exp[-it\mathcal{K}]\chi(0)) = (\chi(0), \mathcal{A}\chi(0)).$$

In particular the χ -operators \mathcal{A} of the quantities A which commute with K are integrals of the motion since:

$$(127) \quad [\mathcal{A}, \mathcal{K}] = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) [A, K] \psi(\tau) d\tau = 0.$$

The occupation number operators corresponding to the eigenvalues of an operator which commutes with K are integrals of the motion of the Gibbs second quantization, because they correspond to the $p_{A'}$ and the $p_{A'}$ are commutable with K :

$$(128) \quad [N_{A'}, \mathcal{K}] = 0 \quad \text{when} \quad [A, K] = 0.$$

It is important to notice that the $N_{A'}^{(\alpha)}$ in general are not integrals of the motion, since in general K and $p_{A'}^{(\alpha)}$ are not commutable.

We shall consider now the states of the form:

$$(129) \quad \chi(t) = \int_{\Omega} \Psi(t; \tau) \chi_1(\tau) d\tau, \quad (\chi(t), \chi(t)) = \int_{\Omega} |\Psi(t; \tau)|^2 d\tau = 1.$$

These χ are eigenfunctionals of N_{op} corresponding to the eigenvalue 1. In this particular case we have:

$$\begin{aligned}
 (130) \quad (\chi(t), N_\lambda \chi(t)) &= \int_{\Omega} \Psi^*(t; \tau) p_\lambda \Psi(t; \tau) d\tau = \\
 &= \int_{\Omega} \Psi^*(0; \tau) \exp[itK] p_\lambda \exp[-itK] \Psi(0; \tau) d\tau = \\
 &= \int_{\Omega} \Psi^*(0; \tau) \exp[itK(\tau)] \varphi_\lambda(\tau) d\tau \int_{\Omega} \varphi_\lambda^*(\tau') \exp[-itK(\tau')] \Psi(0; \tau') d\tau' = \\
 &= \left| \int_{\Omega} \varphi_\lambda^*(\tau) \exp[-itK] \Psi(0; \tau) d\tau \right|^2.
 \end{aligned}$$

The expectation value of N_λ at the time t is now simply the transition probability of Σ from the pure state $\Psi(0; \tau)$ to the state $\varphi_\lambda(\tau)$. In particular when $\Psi(0; \tau) = \varphi_{\lambda_0}(\tau)$

$$(131a) \quad (\chi(0), N_\lambda \chi(0)) = \delta_{\lambda, \lambda_0}.$$

We see that $\Psi(0; \tau)$ is simply the wave function of Σ at the time 0 and $\Psi(t, \tau)$ its wave function at the time t .

The above results show that the Gibbs second quantization may be considered as a statistical generalization of the quantum mechanics. In the next section it will be seen that the results usually obtained with the von Neumann density operators can also be derived with the Gibbs second quantization.

6. — The Gibbs second quantization and the von Neumann statistical formalism.

Let us consider a complete orthonormal set of functions φ_λ . In the representation in which the N_λ are diagonal, the wave functional χ is a function of the eigenvalues N'_λ of the N_λ . We shall now examine especially the wave functionals of the form:

$$(132) \quad \chi(0, N') = \prod_{\lambda} \delta_{N'_\lambda, n_\lambda},$$

$\chi(t; N')$ describes the motion of an assembly of non interacting systems Σ , such that at the time 0 there are n_λ systems in each of the states φ_λ . In the von Neumann statistical formalism the same assembly of systems is described by the operator $R(t)$ satisfying the equation of motion (120) and having the

initial value:

$$(133) \quad R(0) = \sum_{\lambda} n_{\lambda} p_{\lambda}.$$

The wave functionals $\chi(t)$ which take the form (132) at one instant of time are not the only solutions of (98). Thus we see that the Gibbs second quantization is a more general statistical formalism than that of the von Neumann assemblies.

In order to see more clearly the equivalence of the above class of solutions of (98) and the assembly of systems defined by $R(t)$, we shall compute the expectation value $(\chi(t), N_{\lambda}\chi(t))$. We have:

$$(134) \quad (\chi(t), \mathcal{A}\chi(t)) = (\chi(0), \mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{A}\mathcal{U}(t)\chi(0)) = (\chi(0), \mathcal{A}(t)\chi(0)),$$

$$(135) \quad \mathcal{A}(t) = \mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{A}\mathcal{U}(t).$$

$\mathcal{A}(t)$ is the time dependent operator which corresponds to \mathcal{A} in the Heisenberg representation of the Gibbs second quantization. In particular when \mathcal{A} corresponds to the quantity A we have

$$(136) \quad \mathcal{A}(t) = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau,$$

$A(t)$ being the operator for the quantity A in the Heisenberg representation of Σ :

$$(137) \quad A(t) = U^{-1}(t) A U(t).$$

$U(t)$ denotes the unitary operator of the motion of Σ , which was denoted by $U_1(t)$ in the notation used in equation (67). Equation (136) is obviously satisfied at the time 0. Since

$$(138) \quad i \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) = [\mathcal{A}(t), \mathcal{K}],$$

and

$$(139) \quad i \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau = \\ = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) [A(t), K] \psi(\tau) d\tau = \left[\int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau, \mathcal{K} \right],$$

equation (136) is proven for all the values of t . It results from (111), (112) and (136) that

$$(140) \quad N_{\lambda}(t) = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_{\lambda}(t) \psi(\tau) d\tau = \sum_{\lambda', \lambda''} a_{\lambda'}^* a_{\lambda''} \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) p_{\lambda}(t) \varphi_{\lambda''}(\tau) d\tau$$

and since

$$(141) \quad \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) p_{\lambda}(t) \varphi_{\lambda''}(\tau) d\tau = \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) U^{-1}(t) \varphi_{\lambda}(\tau) d\tau \cdot \int_{\Omega} \varphi_{\lambda}^*(\tau) U(t) \varphi_{\lambda''}(\tau) d\tau,$$

we have:

$$(142) \quad N_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda', \lambda''} a_{\lambda'}^* a_{\lambda''} \langle \lambda' | U^{-1}(t) | \lambda \rangle \langle \lambda | U(t) | \lambda'' \rangle.$$

$\langle \lambda' | B | \lambda'' \rangle$ denotes a matrix element of a Σ -operator:

$$(143) \quad \langle \lambda' | B | \lambda'' \rangle = \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) B \varphi_{\lambda''}(\tau) d\tau.$$

The operator $U(t)$ being unitary, $U^{-1} = U^*$ and we have:

$$(144) \quad N_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda', \lambda''} a_{\lambda'}^* a_{\lambda''} \langle \lambda' | U(t) | \lambda \rangle^* \langle \lambda | U(t) | \lambda'' \rangle.$$

It follows from (134) and (144) that:

$$(145) \quad (\chi(t; N'), N_{\lambda} \chi(t; N')) = \sum_{\lambda'} n_{\lambda'} |\langle \lambda | U(t) | \lambda' \rangle|^2.$$

The expectation value of the number of systems in the assembly described by $R(t)$ in which a measurement of a quantity $F = \sum_{\lambda} F'_{\lambda} p_{\lambda}$, with non degenerated eigenvalues, gives the value F'_{λ} is:

$$(146) \quad \text{Trace} \{ p_{\lambda} R(t) \} = \langle \lambda | R(t) | \lambda \rangle.$$

It follows from (120) that:

$$(147) \quad R(t) = U(t) R(0) U^{-1}(t) = \sum_{\lambda'} n_{\lambda'} U(t) p_{\lambda'} U^{-1}(t).$$

Thereby we have:

$$(148) \quad \langle \lambda | R(t) | \lambda \rangle = \sum_{\lambda'} n_{\lambda'} \int_{\Omega} \varphi_{\lambda'}^*(\tau) U(t) p_{\lambda'} U^*(t) \varphi_{\lambda}(\tau) d\tau = \\ = \sum_{\lambda'} n_{\lambda'} |\langle \lambda | U(t) | \lambda' \rangle|^2 = (\chi(t; N'), N_{\lambda} \chi(t; N')).$$

This equation shows that the description of the motion of the assembly given by the von Neumann operator $R(t)$ is equivalent to that given by $\chi(t; N')$.

The $U(t) p_{\lambda} U^{-1}(t)$ are the projection operators corresponding to the wave functions $U(t) \varphi_{\lambda}$. Therefore (147) gives the spectral decomposition of $R(t)$. In the assembly described by $R(t)$ there are n_{λ} systems Σ in each of the states $U(t) \varphi_{\lambda}$. Since

$$(149) \quad \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_{\lambda}(-t) \psi(\tau) d\tau = N_{\lambda}(-t) = \mathcal{U}(t) N_{\lambda} \mathcal{U}^{-1}(t),$$

and

$$(150) \quad \int_{\Omega} \psi^*(\tau) U(t) p_{\lambda} U^{-1}(t) \psi(\tau) d\tau \chi(t; N') = \mathcal{U}(t) N_{\lambda} \chi(0; N') = n_{\lambda} \chi(t; N'),$$

there are n_{λ} systems Σ in each of the states $U(t) \varphi_{\lambda}$ in the assembly described by $\chi(t; N')$. This shows clearly the reason of the equivalence of the two descriptions of the assembly.

It results from (138) that:

$$(151a) \quad i \frac{d}{dt} \psi(t; \tau) = K(\tau) \psi(t; \tau),$$

$$(151b) \quad -i \frac{d}{dt} \psi^*(t; \tau) = \{K(\tau) \psi(t; \tau)\}^*.$$

$\psi(t; \tau)$ has the same equation of motion as the wave function of Σ , hence:

$$(152) \quad \psi(t; \tau) = U(t) \psi(\tau).$$

It is easily seen that as a consequence of equations (151) we have:

$$(153) \quad i \frac{d}{dt} \{\psi^*(t; \tau') \psi(t; \tau'')\} = K(\tau'') \psi^*(t; \tau') \psi(t; \tau'') - \{K(\tau') \psi^*(t; \tau') \psi(t; \tau')\}^*.$$

The matrix elements of the von Neumann operators $R(t)$ in the representation

in which the τ are diagonal have an equation of motion of the same form as (153):

$$(154) \quad i \frac{d}{dt} \langle \tau'' | R(t) | \tau' \rangle = K(\tau'') \langle \tau'' | R(t) | \tau' \rangle - \{ K(\tau') \langle \tau' | R(t) | \tau'' \rangle \}^*.$$

Let us introduce the operator $\varrho(\tau', \tau'')$:

$$(155) \quad \varrho(\tau', \tau'') = \psi^*(\tau') \psi(\tau''), \quad \varrho(t; \tau', \tau'') = \psi^*(t; \tau') \psi(t; \tau'').$$

We shall now prove that:

$$(156) \quad \langle \tau'' | R(t) | \tau' \rangle = (\chi(t; N'), \varrho(\tau', \tau'') \chi(t; N')) = (\chi(0; N'), \varrho(t; \tau', \tau'') \chi(0; N')).$$

The above results show that the expectation values in (156) satisfy (154), so that it is sufficient to prove (156) for $t = 0$. We have

$$(157) \quad (\chi(0, N'), \varrho(\tau', \tau'') \chi(0, N')) = \sum_{\lambda', \lambda''} (\chi(0, N'), a_{\lambda'}^* a_{\lambda''} \chi(0, N')) \cdot \varphi_{\lambda'}^*(\tau') \varphi_{\lambda''}(\tau'') = \\ = \sum_{\lambda'} n_{\lambda'} \varphi_{\lambda'}^*(\tau') \varphi_{\lambda'}(\tau'') = \langle \tau'' | R(0) | \tau' \rangle,$$

thereby (156) is proven. We may consider $\varrho(\tau', \tau'')$ as a matrix element of a hermitian operator \mathcal{R}

$$(158) \quad \varrho(\tau', \tau'') = \langle \tau'' | \mathcal{R} | \tau' \rangle$$

and write quite generally for a normalized $\chi(t)$:

$$(159) \quad R(t) = (\chi(t), \mathcal{R} \chi(t)).$$

Equation (159) allows us to associate a hermitian operator $R(t)$, which satisfies the von Neumann equation of motion (120), to any solution $\chi(t)$ of (98), not necessarily of the form defined by the initial value (132). It is obvious that:

$$(160) \quad \langle \lambda' | \mathcal{R} | \lambda'' \rangle = a_{\lambda''}^* a_{\lambda'}.$$

Hence

$$(161) \quad \langle \lambda' | R(t) | \lambda'' \rangle = (\chi(t), a_{\lambda''}^* a_{\lambda'} \chi(t)),$$

so that (148) is a particular case of (159).

It follows from (161) that

$$(162) \quad \text{Trace } R(t) = (\chi(t), N_{\text{op}}\chi(t)) = (\chi(0), N_{\text{op}}\chi(0)).$$

Let us assume that the expectation value $(\chi(0), N_{\text{op}}\chi(0))$ is finite but not an integer, as occurs in general when the expectation number of systems in the assembly described by $\chi(0)$ is finite. The trace of $R(0)$ being a non integral number, the eigenvalues of R are not all integers and $R(t)$ does not describe the motion of an assembly of systems Σ . Such operators R have nevertheless being used and they are necessary to treat in a general way the incompletely specified states of motion of Σ .

The operator $R(t)$ defined by (159) has in general a trace different from 1. In order to normalize the trace of $R(t)$ we may take

$$(163) \quad R_{\text{nor}}(t) = \left(\chi(t), \frac{\mathcal{R}}{N_{\text{op}}} \chi(t) \right) = (\chi(t), \mathcal{R}_{\text{nor}}\chi(t)),$$

defining $\mathcal{R}/N_{\text{op}}$ by the equations

$$(164) \quad \frac{\mathcal{R}}{N_{\text{op}}} P_0 = 0, \quad \frac{\mathcal{R}}{N_{\text{op}}} P_n = \frac{1}{n} \mathcal{R} P_n \quad \text{for } n \neq 0,$$

the P_n being the projection operators of N_{op} . It follows from (164) that:

$$(165) \quad \frac{\mathcal{R}}{N_{\text{op}}} \chi = \frac{\mathcal{R}}{N_{\text{op}}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathcal{R} P_n \chi.$$

$\mathcal{R}\chi$ is of course not a wave functional but a linear operator acting on the functions of τ , as shown by (160). The nature of \mathcal{R} as an operator on the functions of τ can be conveniently characterized by a generalization of (160):

$$(166) \quad \int_{\Omega} \Psi_1^*(\tau) \mathcal{R} \Psi_2(\tau) d\tau = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) \Psi_2(\tau) d\tau \cdot \int_{\Omega} \Psi_1^*(\tau) \psi(\tau) d\tau.$$

We can now prove easily that the operator $R(t)$ defined by (159) has no negative eigenvalues. Indeed, it follows from (159) and (166) that

$$(167) \quad \int_{\Omega} \Psi^*(\tau) R(t) \Psi(\tau) d\tau = (\chi(t), \int_{\Omega} \psi^*(\tau) \Psi(\tau) d\tau \left\{ \int_{\Omega} \psi^*(\tau) \Psi(\tau) d\tau \right\}^* \chi(t)),$$

hence:

$$(168) \quad \int_{\Omega} \Psi^*(\tau) R(t) \Psi(\tau) d\tau \geq 0.$$

This equation shows that $R(t)$ has no negative eigenvalues.

7. - We shall now examine rapidly the application of the Gibbs second quantization to the analysis of the incompletely specified states of motion of a quantal system Σ . A more detailed discussion will be given in a forthcoming paper.

Let us assume that the initial state of Σ is incompletely known. We may suppose that at the time 0 the value of some quantity A with degenerated eigenvalues was measured and that a value A' was obtained, s being the number of linearly independent eigenfunctions of A corresponding to the eigenvalue A' . With the available information we can describe the incompletely specified state at the time 0 by the projection operator $p_{A'}$. The von Neumann operator of trace 1 corresponding to $p_{A'}$ is:

$$(169) \quad R_{\text{nor}}(0) = \frac{1}{s} p_{A'}.$$

Let the φ_{λ} be a complete orthonormal set of eigenfunctions of A , the indices being chosen in such a way that the eigenfunctions of the eigenvalue A' be $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$. The simplest wave functional $\chi(0; N')$ which describes the incompletely specified state is:

$$(170) \quad \chi^{(1)}(0; N') = \delta_{N'_1, 1} \delta_{N'_2, 1} \dots \delta_{N'_s, 1} \prod_{\lambda > s} \delta_{N'_{\lambda}, 0}.$$

It is also possible to take any of the functionals $\chi^{(r)}$:

$$(171) \quad \chi^{(r)}(0; N') = \delta_{N'_1, r} \delta_{N'_2, r} \dots \delta_{N'_s, r} \prod_{\lambda > s} \delta_{N'_{\lambda}, 0}, \quad (r = \text{positive integer}).$$

The normalized von Neumann operator $R_{\text{nor}}(t)$ computed with the formula (163) is the same for all the functionals $\chi^{(r)}$. Thus we see that a normalized von Neumann operator does not determine completely the wave functional χ , although the wave functional determines completely the von Neumann operator.

A slightly more complicated case is that in which the wave function $\Psi(0; \tau)$ at the time 0, before the measurement, was known. The probabilities

of the various eigenfunctions of A' are

$$(172) \quad w_l = \int_{\Omega} \Psi^*(0; \tau) \varphi_l(\tau) d\tau \bigg/ \sum_{l'=1}^s \int_{\Omega} \Psi^*(0; \tau) \varphi_{l'}(\tau) d\tau \quad (l = 1, 2, \dots, s).$$

When the ratios of the w_l are not all rational, it is not possible to describe the incompletely specified state by a monomial $\chi(0; N')$. In the case of rational ratios we can choose integers n_1, n_2, \dots, n_s such that

$$(173) \quad w_l = \frac{n_l}{n_s} w_s,$$

and take:

$$(174) \quad \chi(0; N') = \delta_{N'_1, n_1} \delta_{N'_2, n_2} \dots \delta_{N'_s, n_s} \prod_{\lambda > s} \delta_{N'_\lambda, 0}.$$

It is interesting to remark that in the case of irrational w_l/w_s , there is no von Neumann assembly of systems which gives the exact ratios of the probabilities, although there is no difficulty in representing the incompletely specified state by an operator $R(0)$:

$$(175) \quad R_{\text{nor}}(0) = \sum_{l=1}^s w_l p_l.$$

In this general case it is necessary to use a multinomial $\chi(0; N')$, i.e. a grand ensemble.

8. — The entropy in the Gibbs second quantization.

A definition of the entropy of the grand ensemble described by $\chi(t)$ can be immediately obtained by taking into account the relation between the wave functional $\chi(t)$ and the von Neumann density operator given in section 6. We have

$$(176) \quad \mathcal{S}[\chi(t)] = -k \text{Trace} \{ R_{\text{nor}}(t) \log R_{\text{nor}}(t) \},$$

k being the Boltzmann constant and R_{nor} being defined by (163). Since we are applying the von Neumann definition to $R_{\text{nor}}(t)$, the entropy $\mathcal{S}[\chi(t)]$ is time independent.

There is a very remarkable circumstance in the possibility of defining the entropy by means of the Gibbs second quantization. Let us suppose that the systems Σ obey the Bose statistics; they may be atomic nuclei with even atomic number, for instance. In this case the Gibbs second quantization is equivalent to the theory of the quantized field of the non interacting bosons Σ . Thus we can assign an entropy to the pure state of the Σ boson field described by the wave functional $\chi(t)$:

$$(177) \quad S_f(t) = -k \text{Trace} \{R(t) \log R(t)\},$$

$$(178) \quad R(t) = (\chi(t), \mathcal{R}\chi(t)). \quad (\chi(t), \chi(t)) = 1.$$

In the case of fields of bosons, the association between the entropy and the incomplete specification of the quantal state is not necessary.

The Gibbs second quantization offers new approaches to the entropy problem. Thus it is possible to introduce a kind of entropy operator:

$$(179) \quad S_{\text{op}}^{(\varphi)} = -k \sum f_\lambda \log f_\lambda.$$

The frequency operator f_λ is defined by the equations

$$(180) \quad f_\lambda P_0 = 0, \quad f_\lambda P_n = \frac{1}{n} N_\lambda P_n \quad (n \geq 1).$$

and the condition of linearity. We have:

$$(181) \quad f_\lambda \chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} N_\lambda P_n \chi.$$

f_λ may be considered as N_λ/N_{op} . The expectation value $(\chi(0; N'), S_{\text{op}}^{(\varphi)} \chi(0; N'))$ of $S_{\text{op}}^{(\varphi)}$ computed with the wave functional (132) has the following value:

$$(182) \quad (\chi(0; N'), S_{\text{op}}^{(\varphi)} \chi(0; N')) = -k \sum_{\lambda} f'_\lambda \log f'_\lambda, \quad f'_\lambda = \frac{n_\lambda}{\sum_{\lambda'} n_{\lambda'}}.$$

It coincides with the value of the von Neumann entropy of the assembly described by the $R(0)$ in (133), but the expectation value at the time t will not in general coincide with the corresponding value of the von Neumann entropy.

The operator $S_{\text{op}}^{(\varphi)}$ depends on the choice of the functions φ_λ . Thereby its expectation value does not give a general satisfactory definition of the entropy.

Nevertheless, when the set of the q_λ plays a significant role, $S_{\text{op}}^{(q)}$ may be conveniently used. In the discussion of the statistical equilibrium the eigenfunctions of K can be chosen as the set q_λ . With this choice of the q_λ , $S_{\text{op}}^{(q)}$ becomes an integral of the motion and its expectation value is time independent. In many important applications Σ is formed by several weakly interacting parts and K can be split into the sum K_0 of the hamiltonians of the parts divided by \hbar and a small interaction term K_{int} :

$$(183) \quad K = K_0 + K_{\text{int}}.$$

By taking the q_λ as a complete orthonormal set of eigenfunctions of K_0 , we get a $S_{\text{op}}^{(q)}$ which is not an integral of the motion and whose expectation value is time dependent.

The quantity

$$(184) \quad S_q[\chi(t)] = -k \sum_\lambda (\chi(t), f_\lambda \chi(t)) \log (\chi(t), f_\lambda \chi(t)),$$

is also related to the entropy. It corresponds in the Gibbs second quantization to the entropy definition of BORN and GREEN⁽¹¹⁾. It has also the disadvantage of depending on the choice of the q_λ . We have

$$(185) \quad S_q[\chi(0; N')] = -k \sum_\lambda f'_\lambda \log f'_\lambda,$$

$\chi(0; N')$ being the wave functional (132), so that $S_q[\chi(0; N')]$ has the same value as the von Neumann entropy of the assembly described by the $R(0)$ in (133). For $t \neq 0$, $S_q[\chi(t; N)]$ does not coincide with the von Neumann entropy of the assembly. $S_q[\chi(t)]$ is less interesting than the expectation value of $S_{\text{op}}^{(q)}$.

A detailed discussion of the entropy and the quantal H theorem with the Gibbs second quantization will be given elsewhere.

9. — The ordinary second quantization.

We shall now apply the general theory of second quantization to the quantum mechanics of systems of similar particles, in order to show how the ordinary second quantization is contained in our general theory. For the sake of simplicity we shall consider only non relativistic spinless particles of

⁽¹¹⁾ M. BORN and H. S. GREEN: *Proc. Roy. Soc., A* **192**, 166 (1948).

mass m interacting through central forces derived from a potential V depending on the distance between two particles.

In the present case the equations (1) are ordinary Schrödinger equations:

$$(186) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{l' \neq l}^n V(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_{l'}) \right\} \Psi_n.$$

There are only the operators \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 :

$$(187) \quad \hbar \mathcal{R}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right\} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$(188) \quad \hbar \mathcal{R}_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2.$$

Equation (8) is now the well known equation of the ordinary second quantization:

$$(189) \quad i\hbar \frac{d\chi}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \right\} \chi.$$

The commutation rules (3) are now:

$$(190) \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}')]_{\pm} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')']_{\pm} = [\psi^*(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}')']_{\pm} = 0.$$

The sign minus corresponds to bosons and the sign plus to fermions. This is immediately seen, by noticing that the functions $\Psi_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ in the Fock expansion are symmetrical in the case of the sign minus in (190), as a consequence of the symmetry of the functionals $\chi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ with respect to the $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. In the case of the sign plus the $\chi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ are anti-symmetrical and the $\Psi_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ too. The symmetry or anti-symmetry of the Ψ_n is shown directly by (74) and (75).

The relation (71) seems to be unknown. The use of the projection operators P_n and $P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ seems also to be new. The relations (74) and (75) are much simpler than those which have been used in the preceding work in second quantization.

The operator N_R introduced in the Gibbs second quantization can also be defined in the ordinary second quantization and corresponds now to the number of particles in a mixed one-particle state. In the particular case of a pure one-particle state described by the wave function $q(\mathbf{x})$, N_R can be denoted by N_φ .

$$(191) \quad N_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

The eigenvalues of N are 0 and the positive integers in the case of bosons and 0 and 1 in the case of fermions.

The operator \mathcal{K} being hermitian, equation (47) holds and the normalized wave functional χ may be considered as a probability amplitude. $|\chi|^2$ gives the probability of the different conditions of an assembly of interacting particles, the number of particles in the assembly being one of the variables. In the Fock treatment⁽⁴⁾ of the second quantization χ is considered as a vector in a χ -space whose components are the Ψ_n , the square of the absolute value of a component $\Psi_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ giving the probability density of finding just n particles, one in each of the elements of volume $d\mathbf{x}_i$ around the point \mathbf{x}_i .

10. — The “second quantization” in the classical theory.

In the classical theory of indistinguishable particles developed in reference (6), the equations (1) are Liouville equations for n particle systems:

$$(192) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n L_1(\tau_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{l \neq i}^n L_2(\tau_i, \tau_l) \right\} \Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n),$$

$$(193) \quad L_1(\tau_i) = -\frac{i}{m} \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i},$$

$$(194) \quad L_2(\tau_i, \tau_l) = i \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l) \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l) \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l},$$

τ_i denotes now a point in the phase space Ω_1 of a single particle. There are only the operators \mathcal{K}_1 and \mathcal{K}_2 :

$$(195) \quad \mathcal{K}_1 = \int_{\Omega_1} \psi^*(\tau) L_1 \psi(\tau) d\tau,$$

$$(196) \quad \mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \psi^*(\tau_1) \psi^*(\tau_2) L_2 \psi(\tau_2) \psi(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2.$$

In the present case equation (8) becomes:

$$(197) \quad i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left\{ \int_{\Omega_1} \psi^*(\tau) L_1 \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \dot{\psi}^*(\tau) \psi^*(\tau') L_2 \psi(\tau') \psi(\tau) d\tau d\tau' \right\} \chi.$$

This is the wave equation for the «quantized» field in the phase space Ω_1 given in reference (6). The commutation rules (3) give the commutation rules of reference (6):

$$(198) \quad [\psi(\tau), \psi^*(\tau')]_{\pm} = \delta(\tau - \tau'), \quad [\psi(\tau), \psi(\tau')]_{\pm} = [\psi^*(\tau), \psi^*(\tau')]_{\pm} = 0.$$

The sign minus corresponds to the classical bosons and the sign plus to the classical fermions. The structure of the formalism is similar to that of the ordinary second quantization, the only essential differences being that in the classical case the space Ω_1 is the six-dimensional phase-space of a single particle and the different forms of the operators K . \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 are hermitian, equation (47) is valid and $|\chi|^2$ can be interpreted as a probability, for a normalized χ . $|\Psi_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n$ gives the probability of finding just n particles, one in each of the phase-space elements of volume $d\tau_i$ around the points τ_i . The probability density $f_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ ordinarily considered in the classical statistical mechanics appears now as the square of the absolute value of a classical wave function Ψ_n in the n -particle phase space. The Liouville equation being a homogeneous linear partial differential equation of the first order, both Ψ_n and f_n satisfy the same Liouville equation.

It is interesting to notice that the analogue of the Gibbs second quantization does also exist in the classical theory. It can be obtained by applying a «second quantization» treatment to the equation (192), the space Ω being taken as the phase-space Ω_n of the n particle system. Each n particle system appears as a «quantum» in this treatment and there is no interaction between these «quanta». In this classical Gibbs «second quantization» it is not necessary to assume that the particles are indistinguishable, they may even be taken with different masses, since the classical wave functions can be introduced for any hamiltonian mechanical system.

11. — The field hamiltonian formalism.

In the case of hermitian $K^{(a)}$, the general theory of second quantization can be obtained by the quantum mechanical method of field quantization applied to the «field» described by a function $\Psi(t; \tau)$ satisfying the non linear

equation:

$$(199) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; \tau) = K^{(1)}(\tau) \Psi(t; \tau) + \sum_{\alpha=1}^g \frac{1}{(\alpha-1)!} \cdot \\ \cdot \int_{\Omega} \Psi^*(t; \tau_1) \dots \Psi(t; \tau_{\alpha-1}) K^{(\alpha)}(\tau, \tau_1, \dots, \tau_{\alpha-1}) \{ \Psi(t; \tau_{\alpha-1}) \dots \Psi(t; \tau_1) \Psi(t; \tau) \} d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha-1}.$$

Equation (199) and its adjoint can be derived from the variational principle:

$$(200) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0,$$

$$(201) \quad \mathcal{L} = i \int_{\Omega} \Psi^*(t; \tau) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; \tau) d\tau - \\ - \sum_{\alpha=1}^g \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \Psi^*(t; \tau_1) \dots \Psi^*(t; \tau_{\alpha}) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha}) \{ \Psi(t; \tau_{\alpha}) \dots \Psi(t; \tau_1) \} d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha}.$$

We shall now develop a hamiltonian formalism based on the variational principle (200). The conjugated momentum of $\Psi(t; \tau)$ is $\Pi(t; \tau)$:

$$(202) \quad \Pi(t; \tau) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; \tau) \right\}} = i \Psi^*(t; \tau).$$

The « hamiltonian » turns out to have the same form as \mathcal{K} :

$$(203) \quad \mathcal{K}_c = \int_{\Omega} \Pi(t; \tau) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; \tau) d\tau - \mathcal{L} = \\ = \sum_{\alpha=1}^g \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \Psi^*(t; \tau_1) \dots \Psi^*(t; \tau_{\alpha}) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha}) \{ \Psi(t; \tau_{\alpha}) \dots \Psi(t; \tau_1) \} d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha}.$$

The Hamiltonian equations

$$(204) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; \tau) = \frac{\delta \mathcal{K}_c(t)}{\delta \Pi(t; \tau)},$$

$$(205) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Pi(t; \tau) = - \frac{\delta \mathcal{K}_c(t)}{\delta \Psi(t; \tau)},$$

coincide respectively with (199) and its adjoint.

The method of field quantization consists in replacing $\Psi(t; \tau)$ and $\Pi(t; \tau)$ by operators $\Psi_{\text{op}}(t; \tau)$ and $\Pi_{\text{op}}(t; \tau)$ satisfying the commutation rules:

$$(206) \quad \begin{cases} [\Psi_{\text{op}}(t; \tau), \Pi_{\text{op}}(t; \tau')]_{\pm} = i\delta(\tau - \tau') \\ [\Psi_{\text{op}}(t; \tau), \Psi_{\text{op}}(t; \tau')]_{\pm} = [\Pi_{\text{op}}(t; \tau), \Pi_{\text{op}}(t; \tau')]_{\pm} = 0. \end{cases}$$

These commutation rules can be satisfied by taking

$$(207) \quad \Psi_{\text{op}}(t; \tau) = \psi(t; \tau), \quad \Pi_{\text{op}}(t; \tau) = i\psi^*(t; \tau),$$

with

$$(208) \quad \begin{cases} [\psi(t; \tau), \psi^*(t; \tau')]_{\pm} = \delta(\tau - \tau'), \\ [\psi(t; \tau), \psi(t; \tau')]_{\pm} = [\psi^*(t; \tau), \psi^*(t; \tau')]_{\pm} = 0. \end{cases}$$

This quantized « hamiltonian » is:

$$(209) \quad \mathcal{R}(t) = \\ = \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \psi^*(t; \tau_1) \dots \psi^*(t; \tau_{\alpha}) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha}) \psi(t; \tau_{\alpha}) \dots \psi(t; \tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha}.$$

The preceding equations are taken in the Heisenberg representation. In the Schrödinger representation the operators ψ and ψ^* are time independent and satisfy the commutation rules (3) and $\mathcal{R}(t)$ goes over into the operator \mathcal{R} defined by (6). « The Schrödinger equation » is simply equation (8).

In the ψ^* -representation we have

$$(210) \quad \mathcal{R} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{\alpha}) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha}) \frac{\delta}{\delta \psi^*(\tau_{\alpha})} \dots \frac{\partial}{\partial \psi^*(\tau_1)} d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha},$$

so that the « Schrödinger equation » is a partial functional differential equation of order s :

$$(211) \quad i \frac{d}{dt} \chi[t; \psi^*] = \\ = \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{\alpha}) K^{(\alpha)}(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha}) \frac{\partial^{\alpha} \chi[t; \psi^*]}{\delta \psi^*(\tau_1) \dots \delta \psi^*(\tau_{\alpha})} d\tau_1 \dots d\tau_{\alpha}.$$

12. - The field hamiltonian formalism of a quantal system.

We shall now apply the theory of the preceding section to the case in which only $K^{(1)}$ is different from zero, i.e. the case in which (199) is linear:

$$(212) \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = K^{(1)} \Psi.$$

We are particularly interested in the case of a quantal system Σ of wave function Ψ whose hamiltonian is $\hbar K$. We shall see that the theory of the Ψ -field leads to the Gibbs second quantization.

Before quantizing the Ψ -field, we shall develop somewhat its c -number hamiltonian formalism. In the «classical» theory of the Ψ -field the quantities analogous to the functions $f(q, p)$ of the classical mechanics are the functionals \mathcal{F} of the independent functions $\Psi(\tau)$ and $\Pi(\tau)$. The Poisson bracket of \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2 is defined in the usual way:

$$(213) \quad (\mathcal{F}_1[\Psi; \Pi], \mathcal{F}_2[\Psi; \Pi]) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta \Psi(\tau)} \frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta \Pi(\tau)} - \frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta \Pi(\tau)} \frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta \Psi(\tau)} \right\} d\tau.$$

The total time derivative of the functional $\mathcal{F}[t; \Psi; \Pi]$ taken along a «trajectory» of the Ψ -field is:

$$(214) \quad \frac{D}{Dt} \mathcal{F}[t; \Psi; \Pi] = \frac{d\mathcal{F}}{dt} + (\mathcal{F}, \mathcal{K}_c).$$

Thereby the constants of the motion are the solutions of the equation:

$$(215) \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} + (\mathcal{F}, \mathcal{K}_c) = 0.$$

This is the Liouville equation of the «classical» Ψ -field. In the discussion of this equation, Ψ and Π must be treated as independent variables and we shall write:

$$(216) \quad \Pi = i\Psi'^*.$$

Thus the Liouville equation becomes:

$$(217) \quad i \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_{\Omega} \left\{ \Psi'^*(\tau) K \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Psi'^*(\tau)} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Psi(\tau)} K \Psi(\tau) \right\} d\tau.$$

The Hamilton-Jacobi equation of the Ψ -field

$$(218) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{Q}[t; \Psi] - i \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \Psi(\tau)} K \Psi(\tau) d\tau = 0,$$

has the same form as the Schrödinger equation (24b) for the complex conjugated $\chi^*[t; \psi]$ of the wave functional χ of the Gibbs second quantization.

We may consider (212) as the equation of motion of a classical system with an infinite number of degrees of freedom. If we try to develop a classical statistical mechanics of this system along Gibbs lines, we must try to introduce a probability density in the phase-space of this system with an infinite number of degrees of freedom, i.e. in the space whose points are pairs of functions $\psi(\tau)$, $\Pi(\tau)$. This is in general not possible, because we cannot give any meaning to the elements of volume of such a space. If it would be possible to give a meaning to the probability density $\mathcal{Q}[t; \Psi(\tau); \Pi(\tau)]$ it would have to satisfy the Liouville equation:

$$(219) \quad i \frac{d}{dt} \mathcal{Q}[t; \Psi(\tau); i\Psi'^*(\tau)] = \int_{\Omega} \left\{ \Psi'^* K \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \Psi'^*(\tau)} - \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \Psi(\tau)} K \Psi(\tau) \right\} d\tau.$$

It is remarkable that by quantizing the Ψ -field we get the Gibbs second quantization, i.e. a statistical quantum mechanics of the quantal system Σ whose Schrödinger equation is precisely (212). The quantum mechanics of Σ is mathematically equivalent to the «classical» theory of the Ψ -field. The statistical quantum mechanics of Σ based on the Gibbs second quantization turns out to be the «quantized» theory of the Ψ -field. Indeed, it results from (211) that the Schrödinger equation of the quantized Ψ -field is

$$(220) \quad i \frac{d}{dt} \chi[t; \psi^*] = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) K \frac{\delta \chi}{\delta \psi^*(\tau)} d\tau,$$

in the representation in which the operators $\psi^*(\tau)$ are diagonal. This is exactly the equation for the wave functional of the Gibbs second quantization in the ψ^* -representation. It follows from (220) and the corresponding equation for the complex conjugated of χ (24b) that the product $\chi[t; \psi^*] \chi^*[t; \psi']$ satisfies (24c), i.e. the Liouville equation (219) of the «classical» theory of the Ψ -field.

It is well known from the quantum theory of fields that the quantized fields are assemblies of quanta. In the case of the quantized Ψ -field the quanta are systems Σ . When the systems Σ have the Bose statistics, the Gibbs second

quantization with the sign minus in the commutation rules coincides with the ordinary second quantization for non interacting systems. In the case of systems Σ with the Fermi statistics, the Gibbs second quantization with the sign minus, required for the description of the mixed states of Σ , is no more equivalent to the ordinary second quantization for non interacting systems.

The identification of the Gibbs second quantization with the theory of the quantized Ψ -field gives an intuitive picture of the extraction process of section 5. The grand ensemble $\mathfrak{E}(t)$ corresponds to a state of the quantized Ψ -field in which the number of quanta Σ is in general not well defined. The interpretation rules I and II do become now equivalent to well known rules of the quantum theory of fields.

13. — Ergodic theorems.

Let us consider the case of hermitian operators \mathcal{K} . We shall assume that the time independent hermitian operator \mathcal{K} admits a spectral decomposition:

$$(221) \quad \mathcal{K} = \sum_{\nu} \nu P_{\nu}, \quad \sum_{\nu} P_{\nu} = 1, \quad P_{\nu} P_{\nu'} = \delta_{\nu, \nu'} P_{\nu}.$$

The spectral decomposition of $\exp[\pm i t \mathcal{K}]$ is then:

$$(222) \quad \exp[\pm i t \mathcal{K}] = \sum_{\nu} \exp[\pm i t \nu] P_{\nu}.$$

Let \mathcal{A} be a time independent linear operator acting on the wave functionals χ . We shall consider now the operator $\mathcal{A}(t)$ in the Heisenberg representation of the second quantization formalism:

$$(223) \quad \mathcal{A}(t) = \exp[i t \mathcal{K}] \mathcal{A} \exp[-i t \mathcal{K}].$$

We want to compute the time average $\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T \mathcal{A}(t) dt$. This time average is also the Cesàro generalized limit of $\mathcal{A}(t)$ for $t = \infty$:

$$(224) \quad \mathcal{A}(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt.$$

It results from (222) that

$$(225) \quad \mathcal{A}(t) = \sum_{\nu, \nu'} \exp\{i t (\nu - \nu')\} P_{\nu} \mathcal{A} P_{\nu'},$$

hence:

$$(226) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt = \sum_{\nu, \nu'} \frac{\exp \{iT(\nu - \nu')\} - 1}{iT(\nu - \nu')} P_\nu \mathcal{A} P_{\nu'}.$$

We get from (226) the ergodic theorem:

$$(227) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt = \sum_\nu P_\nu \mathcal{A} P_\nu.$$

Since

$$(228) \quad (\chi(t), \mathcal{A}\chi(t)) = (\exp[-it\mathcal{K}]\chi(0), \mathcal{A} \exp[-it\mathcal{K}]\chi(0)) = \\ = (\chi(0), \exp[it\mathcal{K}]\mathcal{A} \exp[-it\mathcal{K}]\chi(0)) = (\chi(0), \mathcal{A}(t)\chi(0)),$$

we have the following ergodic theorem for the expectation value $(\chi(t), \mathcal{A}\chi(t))$

$$(229) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\chi(t), \mathcal{A}\chi(t)) dt = \sum_\nu (P_\nu \chi(0), \mathcal{A} P_\nu \chi(0)).$$

The P_ν are the projection operators of \mathcal{K} corresponding to the eigenvalues ν , thereby

$$(230) \quad \mathcal{K} P_\nu = \nu \mathcal{K} P_\nu$$

and $P_\nu \chi(0)$ is an eigenfunctional of \mathcal{K} :

$$(231) \quad \mathcal{K} P_\nu \chi(0) = \nu P_\nu \chi(0).$$

Equation (229) gives the time average of the expectation value $(\chi(t), \mathcal{A}\chi(t))$ in terms of the expectation values of \mathcal{A} for the eigenfunctionals of \mathcal{K} .

It is easily seen that we have also:

$$(232) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathcal{A}(t) dt = \sum_\nu P_\nu \mathcal{A} P_\nu.$$

It follows from (227) that $\mathcal{A}(\infty)$ commutes with the P_ν and with \mathcal{K} :

$$(233) \quad [\mathcal{A}(\infty), P_\nu] = 0, \quad [\mathcal{A}(\infty), \mathcal{K}] = 0.$$

Let us consider now an operator \mathcal{A} of the Gibbs second quantization which corresponds to a quantity A of Σ :

$$(234) \quad \mathcal{A} = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A \psi(\tau) d\tau.$$

We have

$$(235) \quad \mathcal{A}(t) = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau,$$

$$(236) \quad A(t) = \exp[i t K] A \exp[-i t K],$$

because both sides of (235) coincide for $t = 0$ and they have the same rate of time variation, since

$$(237) \quad i \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau = \\ = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) [A(t), K] \psi(\tau) d\tau = \left[\int_{\Omega} \psi^*(\tau) A(t) \psi(\tau) d\tau, \mathcal{K} \right].$$

There is an ergodic theorem for $A(t)$ analogous to (227)

$$(238) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = \sum_{K'} p_{K'} A p_{K'},$$

the K' being the eigenvalues of K and the $p_{K'}$ the corresponding projection operators. We get from (235) a new form of ergodic theorem:

$$(239) \quad \mathcal{A}(\infty) = \sum_{K'} \int_{\Omega} \psi^*(\tau) p_{K'} A p_{K'} \psi(\tau) d\tau.$$

Let the $\varphi_A^{(\alpha)}$ be a complete set of orthonormal eigenfunctions of A and the $\varphi_{K'}^{(\beta)}$ a similar set for K . It follows from (239) that:

$$(240) \quad \mathcal{A}(\infty) = \sum_{A, K'} A' \sum_{\alpha, \beta, \beta'} \int_{\Omega} \varphi_{K'}^{(\beta)*}(\tau) p_{A'}^{(\alpha)} \varphi_{K'}^{(\beta')}(\tau) d\tau a_{K'}^{*(\beta)} a_{K'}^{(\beta')},$$

$$(241) \quad N_{A'}^{(\alpha)}(\infty) = \sum_{K', \beta, \beta'} \int_{\Omega} \varphi_{K'}^{(\beta)*}(\tau) p_{A'}^{(\alpha)} \varphi_{K'}^{(\beta')}(\tau) d\tau a_{K'}^{*(\beta)} a_{K'}^{(\beta')}.$$

In most of the usual cases Σ is formed by several weakly interacting parts Σ_r . K is the sum of the operators K_r for the Σ_r and the small interaction K_{int} :

$$(242) \quad K = K_0 + K_{\text{int}}, \quad K_0 = \sum_r K_r.$$

In the usual applications the energy levels of K_0 are very dense. Because of the smallness of K_{int}

$$(243) \quad \int_{\Omega} \varphi_{K'}^{(\beta)}(\tau) \varphi_{K_0}^{(\alpha)}(\tau) d\tau \cong 0, \quad \text{unless } K' \cong K_0',$$

hence we have:

$$(244) \quad N_{K_0'}^{(\alpha)}(\infty) = \sum_{K' \cong K_0'} \sum_{\beta, \beta'} \int_{\Omega} \varphi_{K'}^{(\beta)*}(\tau) p_{K_0'}^{(\alpha)} \varphi_{K'}^{(\beta')}(\tau) d\tau a_{K'}^{*(\beta)} a_{K'}^{(\beta')}.$$

14. – The ergodic theorems derived in the preceding section can be suitably modified to remain valid in the case in which the spectrum of \mathcal{K} is not a pure point spectrum. It is convenient to introduce the abelian generalized limit:

$$(245) \quad \mathcal{A}_{\text{ab}}(\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma \int_0^{\infty} \exp[-\sigma t] \mathcal{A}(t) dt.$$

The real part of σ must be made to tend to zero by positive values. It is well known from the theory of the generalized limits that the abelian limit exists whenever the Cesàro limit does exist and has then the same value, although the abelian limit may exist in cases in which the Cesàro limit does not exist. We shall now replace (222) by the more general formula:

$$(246) \quad \exp[-it\mathcal{K}] = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} - \int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} \right) \exp[-it\lambda] (\lambda - \mathcal{K})^{-1} d\lambda \quad (\varepsilon > 0).$$

(See the book of HILLE: *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948), where this kind of spectral decomposition is studied in extremely general cases). For $t > 0$ we may close the integration path in the second integral in (246) with a semi-circle of infinite radius centred at the origin and lying below the real axis. Thus it is seen that only the first integral survives for $t > 0$, so that:

$$\exp[-it\mathcal{K}] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \exp[-it\lambda] (\lambda - \mathcal{K})^{-1} d\lambda \quad (t > 0).$$

By taking $\lambda = i\sigma$ we get:

$$(248) \quad \exp[-it\mathcal{K}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \exp[\sigma t] (\sigma + i\mathcal{K})^{-1} d\sigma \quad (t > 0).$$

This equation shows that $(\sigma + i\mathcal{K})^{-1}$ is the Laplace transform of $\exp[-it\mathcal{K}]$. It follows from the Parseval formula for the Laplace transform (see DOETSCH: *Handbuch der Laplace-Transformation* (Basel, 1950), pages, 251-252) that for real values of σ :

$$(249) \quad \int_0^{\infty} \exp[-2\sigma t] \mathcal{A}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma - iy - i\mathcal{K})^{-1} \mathcal{A}(\sigma + iy + i\mathcal{K})^{-1} dy.$$

It results from (249) and (245) that:

$$(250) \quad \mathcal{A}_{ab}(\infty) = \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \left\{ \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{K} + y + i\sigma)^{-1} \mathcal{A}(\mathcal{K} + y - i\sigma)^{-1} dy \right\}.$$

This general ergodic theorem contains as a special case (227), as can be easily seen by using the spectral decomposition of $(\mathcal{K} + y \pm i\sigma)^{-1}$:

$$(251) \quad (\mathcal{K} + y \pm i\sigma)^{-1} = \sum_{\nu} (\nu + y \pm i\sigma)^{-1} P_{\nu}.$$

There is a formula similar to (250) for the abelian generalized limit of $A(t)$:

$$(252) \quad A_{ab}(\infty) = \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \left\{ \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (K + y + i\sigma)^{-1} A(K + y - i\sigma)^{-1} dy \right\}.$$

It follows from (235) that in the Gibbs second quantization we have:

$$(253) \quad \mathcal{A}_{ab}(\infty) = \int_{\Omega} \psi^*(\tau) A_{ab}(\infty) \psi(\tau) d\tau.$$

This formula gives $\mathcal{A}_{ab}(\infty)$ in terms of $A_{ab}(\infty)$.

Formula (252) gives the general solution of the ergodic problem in the Heisenberg representation of the quantum mechanics. It is well known that the standard form of the ergodic theory gives the generalized limit of operators of the form $\exp[-it\mathcal{K}]$. The content of the ergodic theorems is essen-

tially that some generalized limit of that operator is its projection operator corresponding to the eigenvalue 0. This theorem is of little utility in the quantum mechanics, because in general it gives a trivial result. In order to get an interesting result we must ask not for the generalized limit of $\exp[-itK]\Psi$ but rather for that of $\exp[-itK]p_\Psi \exp[itK]$, p_Ψ being the projection operator corresponding to Ψ . More generally we may ask for the generalized limit of the von Neumann operator $R(t)$:

$$(254) \quad R(t) = \exp[-itK]R(0) \exp[itK].$$

The same reasoning which led to (250) shows that:

$$(255) \quad R_{ab}(\infty) = \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \left\{ \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (K + y - i\sigma)^{-1} R(0) (K + y + i\sigma)^{-1} dy \right\}.$$

In the particular case of a point spectrum we get:

$$(256) \quad R_{ab}(\infty) = R(\infty) = \sum_{K'} p_{K'} R(0) p_{K'},$$

$$(257) \quad p_\Psi(\infty) = \sum_{K'} p_{K'} p_\Psi p_{K'}.$$

RIASSUNTO (*)

Si dimostra che i metodi di seconda quantizzazione sono un procedimento matematico generale applicabile a quei formalismi in cui compaiono equazioni lineari di evoluzione, differenziali rispetto alla variabile temporale. Il comune formalismo di seconda quantizzazione per sistemi di bosoni o fermioni, e la « seconda quantizzazione » della teoria classica sviluppata dall'autore si ottengono come casi particolari dei metodi generali. Esistono più modi per applicare i metodi di seconda quantizzazione allo stesso problema lineare, modi che conducono a formalismi assai differenti. Si applica all'equazione di Schrödinger di un sistema meccanico arbitrario una forma semplicissima di seconda quantizzazione allo scopo di sviluppare un nuovo trattamento della meccanica quantica statistica (la seconda quantizzazione di Gibbs). Così operando, si ottiene un metodo immediato per introdurre gli *ensembles* di Gibbs e i *grand ensembles*. Si discute l'entropia con la seconda quantizzazione di Gibbs. Si derivano alcuni teoremi ergodici della seconda quantizzazione generale e della meccanica quantistica.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Interazioni non localizzabili - Confronto fra varie formulazioni.

R. ASCOLI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 10 Marzo 1953)

Riassunto. — Si confrontano le principali formulazioni attraverso le quali è stata introdotta l'idea delle interazioni non localizzabili, mostrando che si possono comprendere come casi particolari in un'unica formulazione generale.

1. — Muovendo da concetti fisici o artifici analitici diversi, l'idea delle interazioni non localizzabili è stata ormai introdotta in vari modi nel formalismo della teoria quantistica dei campi. Si vede però facilmente che queste diverse modalità corrispondono ad una medesima trasformazione matematica delle equazioni dei campi, e cioè alla sostituzione dei prodotti di operatori, che compaiono nei termini di interazione, con integrali contenenti opportuni fattori di forma. Si può così presentare la teoria in modo sufficientemente generale per comprendere le formulazioni finora proposte ⁽¹⁾.

Consideriamo a questo scopo un campo $\psi(x)$ corrispondente a particelle di spin $1/2$ e massa m , in interazione con un campo $\Phi(x)$ corrispondente a bosoni di massa μ ; operiamo inoltre nell'immagine di Heisenberg ⁽²⁾. Introduciamo la non localizzabilità per i tipi di interazione in cui la densità lagrangiana di interazione corrispondente nel caso locale si può mettere sotto la

⁽¹⁾ Non rientra nel programma del presente lavoro l'esame delle teorie che, muovendo dall'idea di YUKAWA, introducono operatori non locali per rappresentare singoli campi (vedi, per esempio, J. RAYSKI: *Proc. Roy. Soc.*, A **206**, 575 (1951) e *Proc. Phys. Soc.*, A **64**, 957 (1951).

⁽²⁾ Si usa un sistema di unità in cui $\hbar = c = 1$. Le variabili di integrazione sono quadridimensionali. Si omette ordinariamente l'indicazione di prodotto scalare tra i quadri-vettori.

forma

$$(1) \quad L_i^{\text{loc}}(x) = \bar{\psi}(x) \Gamma \Phi(x) \psi(x),$$

dove Γ può eventualmente essere un operatore rispetto alle variabili di spin della $\psi(x)$ e della $\bar{\psi}(x)$ e avere carattere vettoriale.

Sia $L_0(x)$ la densità lagrangiana dei campi liberi. Posto $L^{\text{loc}}(x) = L_0(x) + L_i^{\text{loc}}(x)$, applicando il principio variazionale $\delta \left(\int dx L^{\text{loc}}(x) \right) = 0$, si ottengono nel caso locale le equazioni dei campi:

$$\begin{cases} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi(x) = \Gamma \Phi(x) \psi(x), \\ (\square - \mu^2) \Phi(x) = -\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x). \end{cases}$$

Per introdurre la non localizzabilità delle interazioni in una forma in cui si possano far rientrare facilmente le varie teorie proposte, assumiamo come densità lagrangiana:

$$(2) \quad L(x) = L_0(x) + L_i(x) = \\ = L_0(x) + \iiint dx' dx'' dx''' F(x, x', x'', x''') \bar{\psi}(x') \Gamma \Phi(x'') \psi(x'''),$$

dove il fattore di forma $F(x, x', x'', x''')$ deve naturalmente soddisfare a vari requisiti che garantiscono che i risultati della teoria non locale abbiano come limite quelli della teoria locale nei casi in cui quest'ultima concorda con la esperienza.

Applichiamo quindi il principio variazionale:

$$\delta \left(\int dx L(x) \right) = 0.$$

Esso si può scrivere:

$$\delta \int dx \left(L_0(x) + \iiint dx' dx'' dx''' F(x', x, x'', x''') \bar{\psi}(x) \Gamma \Phi(x'') \psi(x''') \right) = 0,$$

e questo permette di effettuare la derivazione rispetto al grado di libertà $\bar{\psi}(x)$, necessaria per ottenere una delle equazioni dei campi.

Si può pure scrivere:

$$\delta \int dx \left(L_0(x) + \iiint dx' dx'' dx''' F(x'', x', x, x''') \bar{\psi}(x') \Gamma \Phi(x) \psi(x''') \right) = 0,$$

e questo permette di derivare rispetto a $\Phi(x)$.

Si ottengono così le equazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi(x) = \iiint dx' dx'' dx''' F(x', x, x'', x''') \Gamma \Phi(x'') \psi(x'''), \\ (\square - \mu^2) \Phi(x) = - \iiint dx' dx'' dx''' F(x'', x', x, x''') \bar{\psi}(x') \Gamma \psi(x'''). \end{cases}$$

Il fattore di forma $F(x, x', x'', x''')$ deve innanzitutto essere invariante per spostamenti dell'origine, e quindi dipendere solo dalle differenze delle variabili. Potremo quindi porre:

$$F(x, x', x'', x''') = F(x' - x, x'' - x, x''' - x).$$

La densità lagrangiana di interazione che compare nella (2), e le equazioni (3) si possono trasformare: posto nella (2) $x' - x = \eta'$, $x'' - x = \eta''$, $x''' - x = \eta'''$, si ha:

$$(4) \quad L_i(x) = \iiint d\eta' d\eta'' d\eta''' F(\eta', \eta'', \eta''') \bar{\psi}(x + \eta') \Gamma \Phi(x + \eta'') \psi(x + \eta''').$$

Posto nella prima delle (3) $x - x' = \eta'$, $x'' - x' = \eta''$, $x''' - x' = \eta'''$ e nella seconda $x' - x'' = \eta'$, $x - x'' = \eta''$, $x''' - x'' = \eta'''$, esse divengono:

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi(x) = \\ \quad = \iiint d\eta' d\eta'' d\eta''' F(\eta', \eta'', \eta''') \Gamma \Phi(x + \eta'' - \eta') \psi(x + \eta''' - \eta'), \\ (\square - \mu^2) \Phi(x) = \\ \quad = - \iiint d\eta' d\eta'' d\eta''' F(\eta', \eta'', \eta''') \bar{\psi}(x + \eta' - \eta'') \Gamma \psi(x + \eta''' - \eta''). \end{cases}$$

Da queste espressioni, scomposte la $\psi(x)$ e la $\Phi(x)$ in integrale di Fourier:

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp \exp[-i(px)] \bar{\psi}(p), \quad \Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp \exp[i(px)] \Phi(p),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp \exp[i(px)] \psi(p),$$

si ottiene per la densità lagrangiana di interazione:

$$L_i(x) = \iiint d\eta' d\eta'' d\eta''' \frac{1}{(2\pi)^{12}} \iiint dp' dp'' dp''' \exp[i(-p' + p'' + p''')x] \cdot \\ \cdot \exp[i(-p'\eta' + p''\eta'' + p'''\eta''')] F(\eta', \eta'', \eta''') \bar{\psi}(p') \Gamma \Phi(p'') \psi(p''').$$

Posto

$$\iiint d\eta' d\eta'' d\eta''' \exp [i(p'\eta' + p''\eta'' + p'''\eta''')] F(\eta', \eta'', \eta''') = G(p', p'', p'''),$$

si ha:

$$(6) \quad L_i(x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \iiint dp' dp'' dp''' \exp [i(-p' + p'' + p''')x] G(-p', p'', p''') \bar{\psi}(p') \Gamma \Phi(p'') \psi(p''').$$

Analogamente le equazioni dei campi divengono:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi(x) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint dp'' dp''' \exp [i(p'' + p''')x] G(-(p'' + p'''), p'', p''') \Gamma \Phi(p'') \mu(p'''), \\ & (\square - \mu^2) \Phi(x) = \\ & = -\frac{1}{(2\pi)^8} \iint dp' dp''' \exp [i(-p' + p''')x] G(-p', p' - p''', p''') \bar{\psi}(p') \Gamma \psi(p'''). \end{aligned} \right.$$

Osserviamo infine che, nel caso particolare in cui la funzione $G(p', p'', p''')$ dipenda solo da p'' e da $p' + p'''$, la seconda delle equazioni si può trasformare ulteriormente; possiamo scrivere innanzitutto:

$$(\square - \mu^2) \Phi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^8} \iint dp' dp''' \exp [i(-p' + p''')x] G(p' - p''') \bar{\psi}(p') \Gamma \psi(p''').$$

Si ha poi, secondo la corrente definizione di funzione di un operatore:

$$G(p) \exp [ipx] = G \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp [ipx]$$

perchè $\exp [ipx]$ è l'autofunzione corrispondente all'autovalore p dell'operatore $(1/i)\partial/\partial x$.

La seconda equazione si può quindi scrivere

$$(\square - \mu^2) \Phi(x) = -G \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x),$$

od anche

$$(8) \quad (\square - \mu^2)\Phi(x) = -G_1(\square)\bar{\psi}(x)I\psi(x),$$

dove si è posto $G(-(1/i)\partial/\partial x^\mu) = G_1(\square)$ dato che la funzione G , dovendo essere invariante per trasformazioni di Lorentz, deve dipendere dagli operatori $\partial/\partial x^\mu$ solo attraverso $(\partial/\partial x^\mu)(\partial/\partial x^\mu) = \square$.

Moltiplicando poi a sinistra per $G_1^{-1}(\square)$ si ha un'equazione che ammette tutte le soluzioni della precedente, e che può permettere un raffronto della teoria delle interazioni non localizzabili con altre teorie, come quelle di BOPP⁽³⁾ e di UHLENBECK e PAIS⁽⁴⁾:

$$(9) \quad G_1^{-1}(\square)(\square - \mu^2)\Phi(x) = -\bar{\psi}(x)I\psi(x).$$

Un'analoga trasformazione si può effettuare per la prima delle equazioni nel caso particolare in cui $G(p', p'', p''')$ dipende solo da p' e da $p'' + p'''$.

2. - Le espressioni così ricavate per la densità lagrangiana e per le equazioni dei campi nella teoria delle interazioni non localizzabili permettono di confrontare rapidamente le varie formulazioni finora proposte, perchè tutte rientrano in questo schema come casi particolari.

Abbiamo innanzitutto le prime formulazioni di G. WATAGHIN⁽⁵⁾, che corrispondono all'introduzione nella Hamiltoniana di interazione (o nella lagrangiana di interazione (6)) di « fattori di taglio » del tipo $G((p' - p'')^2)$. Si vede facilmente che ad essi si giunge assumendo una lagrangiana

$$(10) \quad L(x) = L_0(x) + \int dx' F(x' - x)\bar{\psi}(x')I\Phi(x)\psi(x'),$$

che si può ottenere dalla (2) ponendovi⁽⁶⁾:

$$F(x, x', x'', x''') = F(x' - x)\delta(x''' - x')\delta(x'' - x).$$

Più recentemente R. E. PEIERLS⁽⁷⁾ e H. MACMANUS⁽⁸⁾ hanno proposto di assumere, nel caso classico, la densità lagrangiana di interazione

$$L_i(x) = \int dx'' F(x'' - x)\bar{\psi}(x)I\Phi(x'')\psi(x).$$

⁽³⁾ V. F. BOPP: *Ann. der Phys.*, **38**, 345 (1940).

⁽⁴⁾ G. E. UHLENBECK e A. PAIS: *Phys. Rev.*, **79**, 145 (1950).

⁽⁵⁾ Vedi, per esempio, G. WATAGHIN: *Zeits. f. Phys.*, **88**, 92 (1934) e **92**, 547 (1935).

⁽⁶⁾ Naturalmente $F(x' - x)$ dipende solo dal modulo $(x' - x)^2$ del vettore $x' - x$.

⁽⁷⁾ R. E. PEIERLS: *8° Conseil de Physique - Institut Solvay* (1948), p. 291.

⁽⁸⁾ H. MACMANUS: *Proc. Roy. Soc., A* **195**, 323 (1948).

Essa si può ottenere evidentemente dalla (2) ponendovi:

$$F(x, x', x'', x''') = F(x'' - x)\delta(x' - x)\delta(x''' - x).$$

Le equazioni dei campi che si deducono si identificano con quelle ottenibili dalla teoria di WATAGHIN ora esaminata, perchè l'integrale di azione è lo stesso nei due casi, sebbene la densità lagrangiana sia diversa. I risultati che si ottengono sono stati esaminati nel caso quantistico da J. RAYSKI⁽⁹⁾, che ha mostrato come non tutti i processi della teoria dei campi siano resi convergenti: resta, per esempio, divergente la polarizzazione del vuoto. Nello stesso lavoro J. RAYSKI ha pure esaminato i risultati che si ottengono assumendo la densità lagrangiana di interazione:

$$L_i(x) = \iint dx' dx'' F(x' - x)F(x'' - x)\bar{\psi}(x')\Gamma\Phi(x)\psi(x''),$$

ottenibile dalla (2) ponendovi:

$$F(x, x', x'', x''') = F(x' - x)F(x'' - x)\delta(x'' - x),$$

ed ha mostrato che anche con tale formulazione non tutti i processi sono resi convergenti: per esempio la self-energia dell'elettrone diverge. Ha quindi proposto la densità lagrangiana di interazione

$$L_i(x) = \int dx' dx'' dx''' F(x' - x)F(x'' - x)F(x''' - x)\bar{\psi}(x')\Gamma\Phi(x'')\psi(x'''),$$

(ottenibile evidentemente ponendo nella (2):

$$F(x, x', x'', x''') = F(x' - x)F(x'' - x)F(x''' - x)),$$

che rende convergenti i processi esaminati.

Le formulazioni di G. WATAGHIN più recenti⁽¹⁰⁾ corrispondono, nello schema qui proposto, ad introdurre, nella densità lagrangiana (6), fattori di taglio dipendenti dagli impulsi spaziali e dalle energie delle particelle interagenti in un sistema baricentrico determinato dalle particelle incidenti. Per trovare un'espressione generale dei fattori di taglio occorre quindi distinguere il caso in cui l'opera-

⁽⁹⁾ J. RAYSKI: *Phil. Mag.*, **42**, 1289 (1951).

⁽¹⁰⁾ G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 592 (1951); **9**, 208 (1952). Non prendiamo qui in esame le formulazioni di carattere essenzialmente statistico che G. WATAGHIN ha applicato alla produzione multipla dei mesoni. (Vedi, ad esempio, G. WATAGHIN: *Nature*, **142**, 393 (1938); *Phys. Rev.*, **56**, 1245 (1939)).

tore $\Phi(p'')$ corrisponde ad assorbimento da quello in cui corrisponde ad emissione:

$$G(-p', p'', p''') = \\ = G\left(\frac{|(p''' - p'')(p''' + p'')|}{\sqrt{(p''' + p'')^2}}, (p''' - p'')^2\right) G_1\left(\frac{|p'(p''' + p'')|}{\sqrt{(p''' + p'')^2}}, (p')^2\right) \frac{1 - \varepsilon(p'')}{2} + \\ + G\left(\frac{|(p' - p'')(p' + p'')|}{\sqrt{(p' + p'')^2}}, (p' - p'')^2\right) G_1\left(\frac{|p''(p' + p'')|}{\sqrt{(p' + p'')^2}}, (p'')^2\right) \frac{2 + \varepsilon(p'')}{2},$$

dove $\varepsilon(p) = +1$ se $p_0 > 0$, $\varepsilon(p) = -1$ se $p_0 < 0$ (11).

I passaggi che hanno condotto alla formula (9) sono stati eseguiti per permettere un raffronto tra il metodo delle interazioni non localizzabili ed altre teorie che, partendo da principi apparentemente diversi, conducono a risultati convergenti, quali, per esempio, la teoria proposta nel caso classico da BOPP e quella studiata da UHLENBECK e PAIS (vedi note (3) e (4)).

La teoria di Bopp corrisponde a porre nella (9) $G_1^{-1}(\square) = (\mu_0^2 - \square)/\mu_0^2$, essendo μ_0 una massa dell'ordine di quella del mesone (naturalmente nel caso elettromagnetico è nella (9) $\mu = 0$). Una tale posizione rientra da un punto di vista formalistico nella teoria delle interazioni non localizzabili, e si ottiene introducendo nella seconda delle (7) come fattore di taglio l'espressione

$$(11) \quad G(p' - p''') = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 - (p' - p''')^2},$$

che diventa sensibilmente 1 quando $(p' - p''')^2$ è molto minore di μ_0^2 . Un fattore di taglio dipendente da $(p' - p''')^2$ è stato precisamente introdotto da G. WATAGHIN (5), e si può ottenere dalla lagrangiana (10). Il fattore di taglio (11) diventa però infinito se $(p' - p''')^2$ si approssima a μ_0^2 , e quando $(p' - p''')^2$ tende all'infinito positivo tende a zero in valore assoluto, ma mantenendosi negativo: esso quindi si concilia poco bene con le idee fisiche che stanno alla base della teoria delle interazioni non localizzabili.

Altrettanto si può dire nel caso più generale esaminato estesamente da UHLENBECK e PAIS, in cui la funzione $G_1^{-1}(\square)$ della (9) ammette degli zeri. È interessante notare a questo proposito che nel passaggio dalla (8) alla (9) si introducono in tal caso nuove soluzioni. Allorchè si elimini dalla (9) il termine di interazione le soluzioni introdotte sono quelle corrispondenti alle onde piane delle particelle le cui masse m_i soddisfano all'equazione $G_1^{-1}(m_i) = 0$. Si è pensato che le masse delle particelle elementari siano determinate da

(11) Vedi R. ASCOLI: *Nuovo Cimento*, **9**, 757 (1952).

un'equazione di tal genere (vedi, per esempio, M. BORN ⁽¹²⁾). Si vede che questa idea non ha rapporti con la teoria delle interazioni non localizzabili, in quanto le masse corrisponderebbero agli infiniti della funzione $G_1(p^2)$, e per la prima delle (7), non si potrebbero così avere risultati concordanti con quelli della teoria locale nel caso di piccoli impulsi relativi ⁽¹³⁾.

P. KRISTENSEN e C. MÖLLER ⁽¹⁴⁾ e C. BLOCH (vedi nota ⁽¹³⁾) (il metodo è stato ripreso da J. RAYSKI ⁽¹⁵⁾) hanno infine proposto di partire da un principio variazionale

$$\delta \left(\int dx L_0(x) + \iiint dx' dx'' dx''' F(x', x'', x''') \bar{\psi}(x') \Gamma \Phi(x'') \psi(x''') \right) = 0.$$

In una formulazione di tal genere la densità lagrangiana non è univocamente definita. L'integrale d'azione coincide con quello da noi utilizzato, e ottenibile dalla (2), quindi le equazioni dei campi che si deducono da esso coincidono con quelle da noi ricavate, nelle quali, come si è mostrato, rientrano come casi particolari le equazioni di tutte le teorie esaminate.

Assumendo, per esempio, come densità lagrangiana

$$\iint dx' dx''' F(x', x, x''') \bar{\psi}(x') \Gamma \Phi(x) \psi(x''')$$

la teoria rientra nel nostro schema ponendo

$$F(x, x', x'', x''') = F(x', x'', x''') \delta(x - x''').$$

È utile ancora esaminare in che cosa differiscano il metodo delle interazioni non localizzabili e i metodi di « taglio » di tipo formalistico, quale quello proposto da FEYNMAN ⁽¹⁶⁾. La differenza sta innanzitutto nel fatto che questi ultimi procedimenti applicano l'artificio dei fattori di taglio solamente al calcolo degli elementi di matrice che divergono; inoltre il fattore di taglio non viene applicato ai singoli elementi di matrice hamiltoniana di interazione, come nella teoria delle interazioni non localizzabili, ma ai singoli integrali divergenti, i quali corrispondono alle coppie di elementi di matrice hamiltoniana, che, a causa dei commutatori degli operatori dei campi che vi compaiono, danno luogo alle divergenze. Nel caso della teoria delle interazioni non localizzabili si può quindi stabilire una corrispondenza tra fattori di taglio

⁽¹²⁾ M. BORN: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 463 (1949).

⁽¹³⁾ Vedi anche C. BLOCH: *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **27**, No. 8 (1952).

⁽¹⁴⁾ P. KRISTENSEN e C. MÖLLER: *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **27**, No. 7 (1952).

⁽¹⁵⁾ J. RAYSKI: *Nuovo Cimento*, **10**, 1 (1953).

⁽¹⁶⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **74**, 939 (1939).

e « nodi » dei grafici alla Feynman, mentre nel caso delle teorie di carattere formalistico si ha corrispondenza con i « lati ». Tuttavia i metodi di « taglio » formalistici, nei singoli casi in cui vengono applicati, si possono far rientrare nello schema esposto, precisamente nella formulazione di PEIERLS e MACMANUS per lo più, sebbene occorra osservare che il passaggio dalla « interaction picture » nella quale in genere sono formulati, alla « Heisenberg picture » non è immediato ⁽¹⁷⁾.

3. - Si vede da quanto esposto come la maggior parte dei metodi proposti negli ultimi decenni per eliminare le « divergenze » si possano ricondurre ad una unica trasformazione matematica dell'ordinario formalismo, e come anzi si possano far rientrare in un unico schema. Si vede anche che questo schema non si discosta sostanzialmente dal formalismo hamiltoniano, sebbene per vari motivi fisici si sia tentato di allontanarsi da tale formalismo. Occorre tuttavia osservare che una formulazione della teoria delle interazioni non localizzabili aderente all'idea fisica originaria è solo possibile nell'immagine di Heisenberg, perchè solo in questa gli operatori dei campi variano nello spazio-tempo come le funzioni d'onda a cui corrispondono.

Non si può dire che si abbiano attualmente motivi decisivi per scegliere una delle formulazioni proposte piuttosto che un'altra; si può quindi ritenere che l'essere passati a formulazioni sempre meno restrittive rappresenti un progresso e una chiarificazione. Se ci si limita a considerare i tipi di interazione che si possono ricondurre alla densità lagrangiana « locale » (1) assunta come punto di partenza la formulazione svolta nel presente lavoro, come pure, quando non interessi introdurre una densità lagrangiana, quella di P. KRISTENSEN e C. MÖLLER e di C. BLOCH sembrano essere le più generali possibili, purchè si ammetta che la funzione F possa anche contenere operatori di spin.

⁽¹⁷⁾ È noto che anche i metodi che ricorrono all'introduzione di masse ausiliarie, quale quello di W. PAULI e F. VILLARS (*Rev. Mod. Phys.*, **21**, 435 (1949)) si riconducono facilmente nei singoli casi all'introduzione di fattori moltiplicativi invarianti negli integrali divergenti.

SUMMARY

The author compares the principal formulations till now proposed to introduce the idea of non local interactions, showing that they may be comprised in the same general formulation as particular cases.

Longitudinal Development of Extensive Air Showers.

H. MESSEL (*)

*Department of Physics and Institute for Nuclear Studies,
University of Chicago - Chicago, Illinois*

R. B. POTTS

University of Adelaide - Adelaide, South Australia

(ricevuto il 12 Marzo 1953)

Summary. — A theory of cosmic ray showers is presented which embraces the following features: it is assumed that the primary radiation consists of nucleons; the nucleons generate the pion component by collision with nuclei; the charged pions decay into muons; the neutral pions decay into photons which initiate the soft component. Detailed numerical results are given for the average numbers (or intensities) of the various components at different depths in the atmosphere and for different energy ranges (only particles with energies > 10 GeV are considered in this paper). The theory predicts that the charged pion and soft components have maxima at about 125 gm/cm^2 and that the number of (high energy) muons increases with depth, showing no maximum. The radiation is predominantly muons up to about 8000 metres and the number of high energy charged pions at sea level is much greater than the number of high energy nucleons. This latter feature provides a test of the assumption that the high energy pions do not interact with nuclei in the atmosphere. It is concluded that high energy charged pions must interact with nuclei and that their interaction mean free path is longer than that for nucleons. The *total meson* component and the total radiation follow very closely a power law with the same exponent as that assumed for the primary nucleons.

(*) Now at the School of Physics, University of Sydney, Sydney, Australia.

1. — Introduction.

One of the central problems in cosmic ray physics is the understading of the development of cosmic ray showers through the atmosphere. Although even the earliest experiments revealed many of the properties of the cosmic radiation, it is only in the last two years that the fundamental relation between these components has begun to be understood ⁽¹⁾. From a wealth of experimental results obtained at sea level, on mountains, in aeroplanes, and in high altitude balloons and rockets, the following tentative picture of the development of cosmic ray showers appears to emerge: the primary radiation incident on the top of the earth's atmosphere consists of high energy protons and α -particles and a small proportion of heavy nuclei; from collisions with nuclei in the atmosphere a nucleon cascade develops and mesons, chiefly charged pions and neutral pions, are produced; the charged pions decay into penetrating muons; the neutral pions decay into photons which by pair production initiate the electron-photon component, to which the muons also contribute by electron decay. This is, of course, an over simplified picture, and there are many details, such as the precise nature of the primary radiation and the role of heavy mesons, which are not as yet understood.

The problem of developing a complete mathematical theory to account for the behaviour of extensive air showers is indeed a complex one. Because so little is known, for example, of the precise nature of the collisions of nucleons and mesons with nuclei, the theoretician is forced to make certain assumptions. Nevertheless, once the assumptions have been made, the mathematical theory reflecting these may be developed and numerical results obtained, thus enabling a comparison to be made between theory and experiment. If disagreement is found between the experimental and theoretical results, then one or more of the assumptions in the theory may need to be changed, thus further advancing our knowledge. This seems to us to be the only reasonable method, by which one can proceed in a complex situation of this type. *We do not share the rather peculiar view implied by BARRETT et al. ⁽²⁾ that existing cascade theories are nothing more than idealized mathematical exercises* (see the footnote, p. 153 of reference ⁽²⁾). On the contrary without a sound mathematical theory, even though it is based on certain assumptions, the experimentalist can do little to set his analyses on a sound quantitative basis. One can place little or no reliance in the deductions made from a comparison between a crude and *inexact* mathematical theory of an assumed process and experimental results

⁽¹⁾ G. PUPPI and N. DALLAPORTA: *Progress in Cosmic Ray Physics*, Vol. I (Amsterdam, 1952), Chap. VI.

⁽²⁾ P. H. BARRETT, L. M. BOLLINGER, G. COCCONI, Y. EISENBERG and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 133 (1952).

purporting to check it. Unfortunately this has often been the case in the past. Considerable success has already been achieved in solving many of the mathematical problems arising in cascade theory; both the theory of the fluctuation problem and the three dimensional development of the soft component based on reliable cross sections for pair production and bremsstrahlung are well established ^(3,4); a similar theoretical treatment of the nucleon component has also been given ⁽⁵⁾, though in this case the cross sections have to be chosen somewhat arbitrarily.

Although the above components have been considered separately, no theory has yet been given which embraces all the relations between these components as revealed by the experimental results referred to in a previous paragraph. It is the purpose of this paper to give such a theory; only the longitudinal development of high energy components will be discussed at present but it is intended to consider the lateral spread and lower energies in later publications (*). The theory and results given here should be regarded as only a first simplified treatment of the problem; until more is understood of the individual processes involved in cosmic ray showers, a more detailed theory is hardly warranted.

2. — Diffusion equations.

In this section we will give the diffusion equations describing the longitudinal behavior of an extensive air shower consisting of nucleons, pions, muons, electrons and photons. The equations will be set up in a general way, embracing a large number of possible models. Let $q(P; E_0, E, x) dE$, $q(n; E_0, E, z) dE$, $q(\pi; E_0, E, x) dE$, $q(\pi^0; E_0, E, x) dE$, $q(\mu; E_0, E, x) dE$, $q(e; E_0, E, x) dE$ and $q(p; E_0, E, x) dE$ be the differential average number of protons, neutrons, charged pions, neutral pions, muons, electrons, and photons, respectively with energy in the range $E, E + dE$ at a depth x g/cm², due to a single incident primary proton of energy E_0 . The corresponding average number of particles with energies greater than E will be denoted by $Q = \int_E^\infty q(E_0, E_1) dE_1$. Let $\frac{1}{2}w_1(E_1, E) dE$ and $w_2(E_1, E) dE$ be the differential average number of protons or neutrons and charged pions respectively with

⁽³⁾ H. MESSEL and R. B. POTTS: *Phys. Rev.*, **86**, 847 (1952); **87**, 759 (1952).

⁽⁴⁾ H. S. GREEN and H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **88**, 331 (1952).

⁽⁵⁾ H. MESSEL: *Progress in Cosmic Ray Physics*, Vol. II (Amsterdam), to be published.

(*) The theory for the three dimensional development of an extensive air shower recently been completed by MESSEL and GREEN.

energy in the range E , $E + dE$ emitted from a nucleus due to a collision by a primary charged nucleon of energy E_1 and let $\frac{1}{2}w_3(E_1, E)dE$ and $w_4(E_1, E)dE$ be the differential average number of protons or neutrons and charged pions respectively with energy in the range E , $E + dE$ emitted from a nucleus due to a collision by a primary charged pion of energy E_1 . The number of neutral pions will be assumed to equal $1/a$ the number of charged pions. Furthermore let $w_5(E_1, E)dE$ and $w_6(E_1, E)dE$ define the well known Bethe-Heitler cross sections for bremsstrahlung and pair production respectively and α_s and α_e represent the corresponding total cross sections. β_p , β_π , β_μ and β_e are the energy losses due to ionization in MeV per g/cm² by protons, charged pions, muons and electrons respectively. $m(\pi)$, $m(\pi^0)$ and $m(\mu)$ represent the mass of the charged pion, neutral pion and muon respectively and similarly $\tau(\pi)$, $\tau(\pi^0)$ and $\tau(\mu)$ their mean life times in seconds in the centre of mass frame of reference. $l(n)$ and $l(\pi)$ are the interaction mean free paths of nucleons and charged pions respectively measured in g/cm², and $l(n, \pi) = l(n)/l(\pi)$, $l(\pi, n) = l(\pi)/l(n)$. The radiation unit of electrons and photons measured in g/cm² will be denoted by k and the velocity of light by c . The function $f(E_1)dE$ is the probability that a muon of energy E_1 decays into an electron in the energy range E , $E + dE$ and finally $x'(t) = d\{x(t)\}/dt$, where $x(t)$ defines the depth in the absorber in g/cm² expressed as a function of the height t measured in cm.

The diffusion equations for the various q are then given by

$$(1) \quad \left\{ l(n) \frac{\partial}{\partial x} - l(n)\beta_p \frac{\partial}{\partial E} + 1 \right\} q(P; E_0, E, x) = \frac{1}{2} \int_E^\infty \{ q(P; E_0, E_1, x) + q(n; E_0, E_1, x) \} w_1(E_1, E) dE_1 + \frac{1}{2} l(n, \pi) \int_E^\infty q(\pi; E_0, E_1, x) w_3(E_1, E) dE_1,$$

$$(2) \quad \left\{ l(n) \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right\} q(n; E_0, E, x) = \frac{1}{2} \int_E^\infty \{ q(P; E_0, E_1, x) + q(n; E_0, E_1, x) \} \cdot w_1(E_1, E) dE_1 + \frac{1}{2} l(n, \pi) \int_E^\infty q(\pi; E_0, E_1, x) w_3(E_1, E) dE_1,$$

$$(3) \quad \left\{ l(\pi) \frac{\partial}{\partial x} - l(\pi)\beta_\pi \frac{\partial}{\partial E} - \frac{m(\pi)cl(\pi)}{\tau(\pi)Ex'(t)} + 1 \right\} q(\pi; E_0, E, x) = \int_E^\infty q(\pi; E_0, E_1, x) w_4(E_1, E) dE_1 + l(\pi, n) \int_E^\infty \{ q(P; E_0, E_1, x) + q(n; E_0, E_1, x) \} w_2(E_1, E) dE_1,$$

$$(4) \quad \left\{ l(\pi) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m(\pi^0)cl(\pi)}{\tau(\pi^0)E x'(t)} \right\} q(\pi^0; E_0, E, x) = \frac{1}{a} \int_E^\infty q(\pi; E_0, E_1, x) \cdot \\ \cdot w_4(E_1, E) dE_1 + \frac{l(\pi, n)}{a} \int_E^\infty \{q(P; E_0, E_1, x) + q(n; E_0, E_1, x)\} w_2(E_1, E) dE_1,$$

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \beta_\mu \frac{\partial}{\partial E} - \frac{m(\mu)c}{\tau(\mu)E x'(t)} \right\} q(\mu; E_0, E, x) = \\ = \int_E^\infty q(\pi; E_0, E_1, x) \left\{ \frac{m(\pi)^2}{m(\pi)^2 - m(\mu)^2} \right\} \left\{ \frac{-m(\pi)c}{\tau(\pi)E_1 x'(t)} \right\} \frac{dE_1}{E_1},$$

$$(6) \quad \left\{ k \frac{\partial}{\partial x} - k\beta_e \frac{\partial}{\partial E} + \alpha_5 \right\} q(e; E_0, E, x) = 2 \int_E^\infty q(p; E_0, E_1, x) \cdot \\ \cdot w_6(E_1 - E, E) dE_1 + \int_E^\infty q(e; E_0, E_1, x) w_5(E, E_1 - E) dE_1 + \\ + k \int_E^\infty q(\mu; E_0, E_1, x) f(E_1) \left\{ \frac{-m(\mu)c}{\tau(\mu)E_1 x'(t)} \right\} dE_1,$$

$$(7) \quad \left\{ k \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_6 \right\} q(p; E_0, E, x) = \int_E^\infty q(e; E_0, E_1, x) w_5(E_1 - E, E) dE_1 + \\ + 2k \int_E^\infty q(\pi^0; E_0, E_1, x) \left\{ \frac{-m(\pi^0)c}{\tau(\pi^0)E_1 x'(t)} \right\} \frac{dE_1}{E_1}.$$

The exact general solution of this simultaneous set of integral equations is indeed most difficult to find, however, if one considers certain specific models of extensive air showers then the equations may be solved with little difficulty. In the present instance we will consider the model wherein charged pions may be absorbed, but their secondary effects neglected. More specifically, we take $w_3(E_1, E) dE = w_4(E_1, E) dE = 0$. Since so little is known about the interaction of high energy pions ($E > 1$ GeV) with nuclei, this appears to be the best choice at present. If we confine our attention to high energy electrons and photons in eqns (6) and (7) then $\beta_e = 0$, and $f(E) = 0$ since the contribution to the number of *high energy* electrons from the decay of muons is small. Finally we assume that the functions w_1 , w_2 , w_5 and w_6 are homo-

geneous functions of the primary and secondary energies only. With these conditions the solution of eq.ns (1)-(7) will be given in the succeeding sections.

3. - Nucleons.

The solution of eq.ns (1) and (2), when $w_3 = 0$, has been treated fully by MESSEL⁽⁵⁾, and we quote below the pertinent results. For $E_0 \gg \beta_p$ and $E \approx \beta_p$ (β_p now measured in MeV per interaction length),

$$(8) \quad Q(P; E_0, E, x) \approx \left\{ \frac{\beta_p}{E + \beta_p g(P; s, x)} \right\}^s \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \left(\frac{E_0}{\beta_p} \right)^s \cdot \\ \cdot \{ \exp[-h(s)x/l(n)] + \exp[-x/l(n)] \} \frac{ds}{2s},$$

$$(9) \quad Q(n; E_0, E, x) \approx \left\{ \frac{\beta_p}{E + \beta_p g(P; s, x)} \right\}^s \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \left(\frac{E_0}{\beta_p} \right)^s \cdot \\ \cdot \{ \exp[-h(s)x/l(n)] - \exp[-x/l(n)] \} \frac{ds}{2s},$$

where $g(P; s, x)$ and $g(n; s, x)$ correspond to $g^{(1,1)}(s+1, x)$ and $g^{(1,2)}(s+1, x)$ of reference⁽⁵⁾, respectively, and

$$(10) \quad h(s) = 1 - \int_0^1 \left(\frac{E}{E_1} \right)^s w_1(E_1, E) dE.$$

If we consider high energy nucleons only, then $\beta_p = 0$ and

$$(11) \quad Q(T; E_0, E, x) = Q(P; E_0, E, x) + Q(n; E_0, E, x) = \\ = \mathcal{M} \frac{1}{s} (E_0/E)^s \exp[-h(s)x/l(n)],$$

with $\mathcal{M} = (1/2\pi i) \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} ds$ representing an inverse Mellin transform operator.

If instead of a single primary proton energy E_0 we consider a power law spectrum of protons of the form

$$(12) \quad n(E) = \begin{cases} \gamma E_c^\gamma / E^{\gamma+1} & E > E_c \\ 0 & E < E_c \end{cases},$$

where E_c is the latitude cut-off energy, then (11) becomes

$$(13) \quad Q(T; E_c, E, x) = \mathcal{M} \frac{\gamma}{(\gamma - s)s} \left(\frac{E_c}{E} \right)^s \exp[-h(s)x/l(n)],$$

which for $E > E_c$ yields

$$(14) \quad Q(T; E_c, E, x) = (E_c/E)^\gamma \exp[-h(\gamma)x/l(n)].$$

4. - Charged Pions.

The solution of eq.n (3) when $w_4 = 0$ is straightforward and given by

$$(15) \quad q(\pi; E_0, E, x) = \exp \left[\int_0^x \left\{ \frac{m(\pi)c}{\tau(\pi)z'(t)[E + \beta_\pi(x-z)]} - \frac{1}{l(\pi)} \right\} dz \right] \cdot \int_0^x \exp \left[- \int_0^z \left\{ \frac{m(\pi)c}{\tau(\pi)v'(t)[E + \beta_\pi(z-v)]} - \frac{1}{l(\pi)} \right\} dv \right] \cdot R(E_0, E + \beta_\pi(x-z), z) dz,$$

where R is given by

$$(16) \quad R(E_0, E, x) = \frac{1}{l(n)} \int_E^\infty \{ q(P; E_0, E_1, x) + q(n; E_0, E, x) \} w_2(E_1, E) dE_1,$$

and hence is known from section 3. For absorbers of constant density $x'(t) = -\delta$, where δ is the density of the absorber measured in g/cm³. In this instance (15) reduces to

$$(17) \quad q(\pi; E_0, E, x) = \exp[-x/l(\pi)] E^{K/\beta_\pi} \int_0^x R(E_0; E + \beta_\pi(x-z), z) \cdot \{ E + \beta_\pi(x-z) \}^{-K/\beta_\pi} \exp[z/l(\pi)] dz,$$

with $K = \frac{m(\pi)c}{\tau(\pi)\delta}$. If we consider the atmosphere as an example of an absorber whose density is not constant and take it to be isothermal, then $x'(t) = -(g\delta_0/p_0)x(t)$

$$(18) \quad x(t) = (p_0/g) \exp[-(g\delta_0/p_0)t],$$

where p_0 , δ_0 and g are the surface pressure, surface air density and acceleration due to gravity, respectively. In this case (15) reduces to

$$(19) \quad q(\pi; E_0, E, x) = \exp[-x/l(\pi)] \left(\frac{E}{x}\right)^{1/(E+\beta_\pi x)} \int_0^x R(E_0, E + \beta_\pi(x-z), z) \cdot \left\{ \frac{E + \beta_\pi(x-z)}{z} \right\}^{-1/(E+\beta_\pi x)} \exp[z/l(\pi)] dz,$$

where $l = \frac{m(\pi)cp_0}{\tau(\pi)g\delta_0} = 1.35 \cdot 10^{-8} \frac{m(\pi)}{\tau(\pi)} \text{ GeV}$ and $m(\pi)$ is measured in electron

mass units. For the high energy region where we may set $\beta_\pi = 0$, then (17) and (18) reduce further,

$$(20) \quad q(\pi; E_0, E, x) = \exp[-(K/E + 1/l(\pi))x] \int_0^x R(E_0, E, z) \cdot \exp[(K/E + 1/l(\pi))z] dz,$$

$$(21) \quad q(\pi; E_0, E, x) = \exp[-x/l(\pi)] \int_0^x R(E_0, E, z) \left(\frac{z}{x}\right)^{1/E} \cdot \exp[z/l(\pi)] dz.$$

β_π in the expression for $R(E_0, E, x)$ may also legitimately be set equal to zero since nucleons which have energies sufficiently great to create high energy pions, cannot be greatly effected by ionization losses themselves. Thus in (20) and (21)

$$(22) \quad R(E_0, E, x) = \mathcal{M} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s+1} \frac{y(s)}{l(n)E_0} \exp[-h(s)x/l(n)],$$

where

$$(23) \quad y(s) = \int_0^1 \left(\frac{E}{E_1}\right)^s w_2(E_1, E) dE.$$

If one now considers the number of changed pions with energy $> E$, then for an absorber of constant density

$$(24) \quad Q(\pi; E_0, E, x) = \mathcal{M} \frac{y(s)}{l(n)E_0} \int_E^{E_0} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s+1} \{K/E + 1/l(\pi) - h(s)/l(n)\}^{-1} \cdot \{\exp[-h(s)x/l(n)] - \exp[-(K/E + 1/l(\pi))x]\} dE,$$

and for the atmosphere

$$(25) \quad Q(\pi; E_0, E, x) = \mathcal{M} \exp[-x/l(\pi)] \left(\frac{E_0}{l}\right)^s \frac{y(s)}{l(n)} \int_{l/E_0}^{l/E} u^{s-1} du \int_0^1 t^u x \cdot \\ \cdot \exp[(1/l(\pi) - h(s)/l(n))xt] dt.$$

For the power law spectrum (12) eqn. (25) reduces, for $E > E_c$, to

$$(26) \quad Q(\pi; E_c, E, x) = \left(\frac{E_c}{l}\right)^s \frac{\gamma y(\gamma)}{l(n)} \exp[-x/l(\pi)] \int_0^{l/E} u^{s-1} du \int_0^1 t^u x \cdot \\ \cdot \exp[(1/l(\pi) - h(\gamma)/l(n))xt] dt.$$

If in addition charged pions are assumed not to be absorbed, then (26) simplifies to

$$(26a) \quad Q(\pi; E_c, E, x) = \left(\frac{E_c}{l}\right)^s \frac{\gamma y(\gamma)}{l(n)} \int_0^{l/E} u^{s-1} du \int_0^1 t^u x \exp[-h(\gamma)xt/l(n)] dt.$$

5. — Neutral Pions.

The solution of eqn. (4), when $w_4 = 0$, is of course only a special case of the solutions given for charged pions in the previous section, and hence requires no special treatment:

$$(27) \quad q(\pi^0; E_0, E, x) = \exp\left[\int_0^x \frac{m(\pi^0)c}{\tau(\pi^0)z'(t)E} dz\right] \cdot \\ \cdot \int_0^x \exp\left[-\int_0^z \frac{m(\pi^0)c}{\tau(\pi^0)v'(t)E} dv\right] \frac{1}{a} R(E_0, E, z) dz.$$

If we use the expression (22) for $R(E_0, E, x)$ then in absorbers of constant density

$$(28) \quad Q(\pi^0; E_0, E, x) = \mathcal{M} \frac{y(s)}{al(n)E_0} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s+1} \{K_1/E - h(s)/l(n)\}^{-1} \cdot \\ \cdot \{\exp[-h(s)x/l(n)] - \exp[-K_1x/E]\},$$

where $K_1 = \frac{m(\pi^0)c}{\tau(\pi^0)\delta} = 1.7 \cdot 10^{-14} \frac{m(\pi^0)}{\delta\tau(\pi^0)} \text{ (GeV)(g/cm}^2\text{)}^{-1}$ and $m(\pi^0)$ is measured in electron mass units. In the atmosphere, for instance

$$(29) \quad q(\pi^0; E_0, E, x) = \mathcal{M} \frac{y(s)}{al(n)E_0} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s+1} \int_0^x \left(\frac{z}{x}\right)^{l_1/E} \exp[-h(s)x/l(n)] dz,$$

with $l_1 = \frac{m(\pi^0)cp_0}{\tau(\pi^0)g\delta_0} = 1.35 \cdot 10^{-8} \frac{m(\pi^0)}{\tau(\pi^0)} \text{ GeV}$. The main contribution to the integral in (29) comes from the upper limit, hence

$$(30) \quad q(\pi^0; E_0, E, x) \approx -\frac{Ex'(t)\tau(\pi^0)}{am(\pi^0)c} R(E_0, E, x),$$

providing $l_1/E \gg 1$, that is as long as $E < 10^8 \text{ GeV}$. Eqn. (30) is obvious from the physics of the situation and merely shows that due to the very short life time of the neutral pions, they practically all decay the moment they are emitted. Note that in the case of constant density one cannot give an expression similar to (30), which is valid over a wide range of energies.

6. — Muons.

The solution of eqn. (5) for the muons is straightforward,

$$(31) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \exp \left[\int_0^x \frac{m(\mu)c dz}{\tau(\mu)z'(t)[E + \beta_\mu(x-z)]} \right] \cdot \exp \left[- \int_0^x \frac{m(\mu)c dv}{\tau(\mu)v'(t)[E + \beta_\mu(x-z)]} \right] S(E_0, E + \beta_\mu(x-z), z) dz,$$

with

$$(32) \quad S(E_0, E, x) = \int_E^\infty q(n; E_0, E_1, x) \left\{ \frac{m(\pi)^2}{m(\pi)^2 - m(\mu)^2} \right\} \left\{ \frac{-m(\pi)c}{\tau(\pi)E_1x'(t)} \right\} \frac{dE_1}{E_1}.$$

Since $S(E_0, E, x)$ for any given condition, may readily be found using the results of section 4, (31) constitutes a complete solution of (5). For absorber of constant density (31) becomes

$$(32) \quad q(\mu; E_0, E, x) = E^{K_2/\beta_\mu} \int_0^x S(E_0, E + \beta_\mu(x-z), z) \{E + \beta_\mu(x-z)\}^{-K_2/\beta_\mu} dz,$$

where $K_2 = \frac{m(\mu)c}{\tau(\mu)\delta}$. In the case of variable density, the atmosphere for instance,

$$(33) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \left(\frac{E}{x}\right)^{l_2/(E+\beta_\mu x)} \int_0^x S(E_0, E + \beta_\mu(x-z), z) \cdot \left\{ \frac{E + \beta_\mu(x-z)}{z} \right\}^{-l_2/(E+\beta_\mu x)} dz,$$

with $l_2 = \frac{m(\mu)cp_0}{\tau(\mu)g\delta_0} = 1.35 \cdot 10^8 \frac{m(\mu)}{\tau(\mu)} \text{ GeV}$. In the high energy region where energy loss by ionization may be neglected (32) and (33) become

$$(34) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \exp[-K_2 x/E] \int_0^x S(E_0, E, x) \exp[K_2 z/E] dz,$$

and

$$(35) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \int_0^x S(E_0, E, z) (z/x)^{l_2/E} dz.$$

Let us now consider (35), the expression for the number of high energy muons throughout the atmosphere, in more detail. From (21), (22) and (35) we find

$$(36) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \int_0^x \left(\frac{z}{x}\right)^{l_2/E} \exp[-z/l(\pi)] \frac{dz}{z} \int_E^\infty \left(\frac{l}{E_1}\right) \frac{dE_1}{0.4E_1} \cdot \mathcal{M} \left(\frac{E_0}{E_1}\right)^{s+1} \frac{y(s)}{l(n)E_0} \int_0^z \left(\frac{v}{z}\right)^{l/E_1} \exp\{[1/l(\pi) - h(s)/l(n)]v\} dv.$$

If we were to assume that the charged pions are not absorbed but simply decay, then the exponential terms in $1/l(\pi)$ would be equal to one and (36) would become

$$(37) \quad q(\mu; E_0, E, x) = \int_E^\infty \left(\frac{l}{E_1}\right) (l_2/E - l/E_1)^{-1} \frac{dE_1}{0.4E_1} \mathcal{M} \left(\frac{E_0}{E_1}\right)^{s+1} \frac{y(s)}{l(n)E_0} \cdot \int_0^x \left\{ \left(\frac{v}{x}\right)^{l/E_1} - \left(\frac{v}{x}\right)^{l_2/E} \right\} \exp[-h(s)v/l(n)] dv.$$

On this assumption, for the power law spectrum (12) and $E > E_c$, we find

$$(38) \quad Q(\mu; E_c, E, x) = \left(\frac{E_c}{l}\right)^\gamma \frac{\gamma y(\gamma)}{0.4 l(n)} \int_0^{l/E} \frac{du}{u^2} \int_0^u v^{\gamma+1} \left\{v - \frac{l_2 u}{l}\right\}^{-1} dv \cdot \\ \cdot \int_0^1 \{t^{l_2 u/l} - t^v\} \exp[-h(\gamma)xt/l(n)] x dt.$$

By choosing energies E sufficiently great (this point will be discussed in a later section) the decay of muons may be neglected, hence in this case

$$(39) \quad Q(\mu; E_c, E, x) = \left(\frac{E_c}{E}\right)^\gamma \frac{y(\gamma)}{0.4(\gamma+1)h(\gamma)} \{1 - \exp[-h(\gamma)x/l(n)]\} - \\ - \left(\frac{E_c}{l}\right)^\gamma \frac{\gamma y(\gamma)}{0.4 l(n)} \int_0^{l/E} u^{\gamma-1} du \int_0^1 t^u \exp[-h(\gamma)xt/l(n)] x dt + \\ + \left(\frac{E_c}{l}\right)^\gamma \frac{\gamma y(\gamma)E}{0.4 l(n)} \int_0^{l/E} u^\gamma du \int_0^1 t^u \exp[-h(\gamma)xt/l(n)] x dt.$$

7. — Electrons and Photons.

In section 5 we derived the expression for $q(\pi^0; E_0, E, x)$ hence the solution of (6) and (7) when $\beta_e = 0$ and $f(E_1) = 0$ may easily be obtained. The solution when $\beta_e \neq 0$, $f(E_1) \neq 0$ may also be found; however, we leave the treatment of this problem to a later date. Substituting the value of $q(\pi^0, E_0, E_1, x)$ given by (30) and applying a Laplace transform of the variable (x/k) to λ and a Mellin transform of the energy variable E , eqn. (6) and (7) in the functions q become a matrix equation in the transformed functions \bar{q} :

$$(40) \quad \begin{bmatrix} \lambda + A_1(s) & A_2(s) \\ A_3(s) & \lambda + A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}(l; s, \lambda) \\ \bar{q}(p; s, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_0^s y(s)}{s+1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2k}{al(n)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda + kh(s)/l(n) \end{Bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

where

$$(41) \quad \begin{cases} A_1(s) = \alpha_5 - \int_0^\infty E_1^s (E_1 + E_2)^{-s} w_3(E_1, E_2) dE_2, \\ A_2(s) = -2 \int_0^\infty E_1^s (E_1 + E_2)^{-s} w_6(E_1, E_2) dE_2, \\ A_3(s) = - \int_0^\infty E_2^s (E_1 + E_2)^{-s} w_5(E_1, E_2) dE_2, \\ A_4 = \alpha_6. \end{cases}$$

Inverting the transform yields

$$\begin{aligned}
 (42) \quad \left[\begin{matrix} q(e; E_0, E, x) \\ q(p; E_0, E, x) \end{matrix} \right] &= \mathcal{M} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s+1} \frac{2k}{al(n)} \frac{y(s)}{E_0(s+1)} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{\exp[-\lambda_1(s)x/k]}{[\lambda_2(s) - \lambda_1(s)][kh(s)/l(n) - \lambda_1(s)]} \left[\begin{matrix} -A_2(s) \\ A_1(s) - \lambda_1(s) \end{matrix} \right] + \right. \\
 &+ \frac{\exp[-\lambda_2(s)x/k]}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)][kh(s)/l(n) - \lambda_2(s)]} \left[\begin{matrix} -A_2(s) \\ A_1(s) - \lambda_2(s) \end{matrix} \right] + \\
 &\left. + \frac{\exp[-kh(s)x/l(n)]}{[\lambda_1(s) - kh(s)/l(n)][\lambda_2(s) - kh(s)/l(n)]} \left[\begin{matrix} -A_2(s) \\ A_1(s) - kh(s)/l(n) \end{matrix} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

where

$$(43) \quad \begin{matrix} \lambda_1(s) \\ \lambda_2(s) \end{matrix} = \frac{1}{2} \{A_1(s) + A_4\} \pm \frac{1}{2} \{[A_1(s) - A_4]^2 + 4A_2(s)A_3(s)\}^{1/2}.$$

The functions $A_1(s)$, $A_2(s)$, $A_3(s)$, $\lambda_1(s)$, and $\lambda_2(s)$ are well known and tabulated ⁽⁶⁾ for various values of the parameter « s ». The expressions $Q(e; E_c, E, x)$ and $Q(p; E_c, E, x)$ for the power law spectrum (12) and $E > E_c$ may readily be obtained from (42) by replacing s by γ and $\mathcal{M}(1/E_0)(E_0/E)^{s+1}$ by $\gamma(E_c/E)^\gamma$ in the right hand side of (42).

8. — Numerical Results.

In the previous sections we have developed a fairly broad and general theory which embraces many models of the development of extensive air showers in their passage through matter. In this section we wish to present numerical results for the various components of an air shower developing in the atmosphere for one specific model. The model for which we give numerical results is the following: Only high energies are considered, thus $\beta_p = \beta_e = \beta_\pi = \beta_\mu = 0$. We assume that the primary radiation incident on the top of the earth's atmosphere consists of nucleons obeying an integral power law spectrum (given by (12)) with exponent γ ; more precisely, it is assumed that the average number of nucleons with energy exceeding E GeV at the top of the atmosphere is proportional to $(E_c/E)^\gamma$ where E_c GeV is the cut-off energy.

In making this assumption, two main simplifications are involved. Firstly, heavy nuclei are neglected. This is partially justified because heavy nuclei are present as only a small percentage of the primary radiation and in any case they are rapidly absorbed, their mean free path being about 30 g/cm²

(6) L. JÁNOSSY and H. MESSEL: *Proc. Roy. Irish Acad.*, A 54, 217 (1951).

compared with 75 g/cm² for protons. The second simplification is the assumption of a power law. It has not been considered worthwhile to use any of the more refined energy spectra which have been proposed ⁽¹⁾, since their use would lead to a great increase in the amount of labour involved in obtaining explicit numerical results.

It is further assumed that if a nucleon of energy E_0 collides with a nucleus in the air, then (1) the average number of nucleons with energies in the range $E, E + dE$ which emerge is $w_1(E/E_0)dE/E_0$ where

$$(44) \quad w_1(E/E_0) = \mathcal{M}(E_0/E)^{s+1}\{1 - h(s)\},$$

(2) the average number of (charged) pions in the energy range $E, E - dE$ which emerge is $w_2(E/E_0)dE/E_0$ where

$$(45) \quad w_2(E/E_0) = \frac{1}{3} \mathcal{M}(E_0/E)^{s+1} h(s) \{1 - \alpha(s)\} / \alpha(s),$$

(3) the average number of neutral pions in the energy range $E, E + dE$ which emerge is $\frac{1}{2}w_2(E/E_0)dE/E_0$.

In these expressions,

$$(46) \quad \alpha(s) = 1 - 240 \{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)\}^{-1},$$

$$(47) \quad h(s) = 1 - 2 \{1 - \{1 + 3.7\alpha(s)\} \exp[-3.7\alpha(s)]\} / \{3.7\alpha(s)\}^2.$$

This assumption is perhaps the most contentious of the present theory. It is based on the results from the cascade theory of the HJ(1) model of a nucleon-nucleus collision ⁽⁷⁾; in this model charged and neutral pions are supposed to be created by plural production in individual nucleon-nucleon collisions and then to pass through the nucleus without interacting with the nucleons. Experiments on stars have so far been unable to give conclusive evidence favouring any model in preference to the one assumed here; even detailed theoretical investigations of different models has lead to surprisingly similar results ⁽⁸⁾. This in itself suggests that the overall picture of the cosmic radiation in the atmosphere either will not depend very sensitively on the kind of nucleon-nucleus collisions assumed or else it will prove a more sensitive test of such collisions than that provided by data on stars. It has to be noted that in the HJ(1) model no account is taken of the production of the heavy mesons τ , κ , V , ζ , etc., but it seems reasonable to suppose that, within the present assumptions, their effects will not be quantitatively important.

⁽⁷⁾ H. MESSEL, R. B. POTTS and C. B. A. MCCUSKER: *Phil. Mag.*, **43**, 889 (1952).

⁽⁸⁾ H. MESSEL and R. B. POTTS: *Phys. Rev.*, **88**, 488 (1952).

We should like to stress at this point that one does not have to take the explicit forms of w_1 and w_2 that we did in (44) and (45). If one so chooses he may draw the values of w_1 and w_2 from any theory he wishes, providing the functions are homogeneous with respect to the primary and secondary energy. We will also neglect the decay of exceedingly high energy muons in the atmosphere. The probability of a muon created at a depth of 90 gm/cm² not decaying before sea-level is $\approx \exp[-3/E]$ where E is its energy in GeV. For energies greater than 10 GeV, to which our present numerical results are limited, this probability > 0.74 and increases rapidly with energy, exceeding 0.9 for energies > 30 GeV. For energies < 10 GeV one must take the loss of muons, due to decay, into account, otherwise the numerical results become meaningless. One consequence of the above is that the high energy soft component is generated solely by the decay of neutral pions (that is $f(E_1)=0$ in (7)).

We now come to one of the main points of our model. We are going to assume that high energy pions *do not* interact with nuclei, in other words we shall use (26a) for $Q(\pi; E_c, E, x)$. This assumption is one on which the results for charged pions and muons depend very sensitively (the results for the high energy soft component are quite insensitive). If the above assumption is incorrect, as we believe it is, then the results which we obtain for the charged pions and muons should be in disagreement with the experimental results. This should then help solve the controversy as to whether or not high energy charged pions interact with nuclei (see reference (8)).

For the constants appearing in our formulae we take the following values: $\gamma = 1.5$ (experiments indicate a value somewhere near this for the energy range under consideration); using $m(\pi) = 274$ and $\tau(\pi) = 2 \cdot 10^{-8}$, $l = 180$ GeV; for k , the electron-photon cascade unit in air we take 43 g/cm² and for the nucleon mean free path, $l(n) = 75$ g/cm². We tabulate the results for $l/E = 18, 12, 9, 6, 3$ corresponding to $E \simeq 10, 15, 20, 30, 60$ GeV. A slight change in the value of l means simply a slight change in the listed values of E .

It will be noticed that the average number Q for each component of the radiation depends on E_c only as the power E_c^γ (this means, of course, that the latitude effects will be similar for all components). It is convenient, then, to evaluate instead of Q the functions

$$(48) \quad G(T; E, x) = (l/E_c)^\gamma Q = Q(180/E_0)^{1.5};$$

this is equivalent to assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ where E_0 is the primary energy of the nucleons. Using the above values of the constants and w_1 and w_2 given by (44) and (45) we then obtain the following results.

(a) *Nucleons.* — From equation (14), the average number of nucleons with energy $> E > E_c$ GeV at depth x (in $l(n)/h(\gamma) \approx 100$ g/cm²) due to a primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ is

$$(49) \quad G(T; E, x) = (180/E)^{1.5} e^{-x};$$

the results are given in Table I.

TABLE I. — Average number of nucleons with energy $> E$ GeV at depth x (in 100 g/cm²) in the atmosphere, assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

$E \backslash x$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	6	10
10	76.4	46.3	28.1	17.0	10.0	3.80	1.40	0.189	0.00347
15	41.6	25.2	15.3	9.28	5.46	2.07	0.762	0.103	0.00189
20	27.0	16.4	9.93	6.02	3.65	1.34	0.495	0.0670	0.00123
30	14.7	8.91	5.41	3.28	1.93	0.732	0.269	0.0364	0.000667
60	5.20	3.15	1.91	1.16	0.682	0.259	0.0952	0.0129	0.000236

(b) *Charged pions.* — From (26a) and (48), the average number of charged pions with energy $> E > E_c$ GeV at depth x in the atmosphere due to a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ is

$$(50) \quad G(\pi; E, x) = 0.3714 \int_0^{180/E} \sqrt{u} F(u, x) du,$$

where

$$(51) \quad F(u, x) = \int_0^1 t^u x \exp[-xt] dt.$$

The function $F(u, x)$ is, apart from a factor x^u , the incomplete factorial function; the integral in (50) can only be evaluated numerically. It has been found most convenient to use tables⁽⁹⁾ of the χ^2 distribution

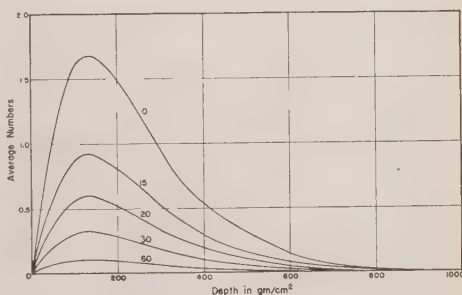


Fig. 1. — Average number of charged pions with energy $> E$ GeV in the atmosphere assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the curves are the values of E .

⁽⁹⁾ K. PEARSON: *Tables for Statisticians and Biometricians*, Part I, Biometrika Office (London, 1945).

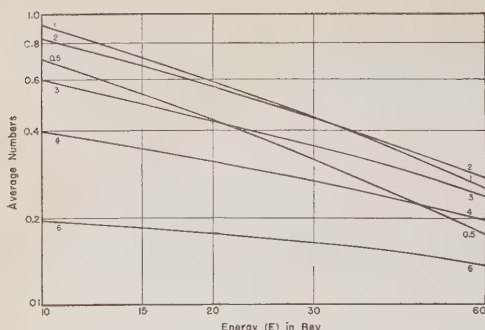


Fig. 2. - Average number of charged pions with energy $> E$ in the atmosphere, assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the curves are the values of the depth x in 100 gm/cm².

The numerical integration has been performed using Weddle's formula the results are given in Table II and Figs. 1 and 2.

It should be noted that the three significant figures given in Table II cannot be trusted as correct because of the inaccuracy of the numerical integration, especially for large E . However, by choosing the same integration procedure for all x one obtains results which are suitable for comparison purposes; the assumptions of the present theory do not justify a more accurate evaluation. In any case, the results depend rather sensitively on the value of γ ; for example the multiplicative constant in (50) varies from 0.67 for $\gamma = 1$ to 0.27 for $\gamma = 2$.

(c) *Muons*. - From (39) and (48), the average number

of muons with energy $> E > E_c$ GeV at depth x in the atmosphere due to a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ is

$$(54) \quad G(\mu; E, x) = 0.2476(180/E)^{1.5}(1 - e^{-x}) - \\ - 0.9286 \int_0^{180/E} \sqrt{u} F(u, x) du + 0.9286(E/180) \int_0^{180} u \sqrt{u} F(u, x) du.$$

function $P(n', \chi^2)$ in terms of which $F(u, x)$ is given by

$$(52) \quad F(u, x) = u! x^{-u} \{1 - P(2u+3, 2x)\}.$$

The tables enable one to calculate $F(u, x)$ for half integral u and x ; for u large compared with x the following relation, valid for integral u , has been used:

$$(53) \quad F(u, x) = e^{-x} \left\{ \frac{x}{u+1} \left(1 + \frac{x}{u+2} \right) \cdot \left(1 + \frac{x}{u+3} \left(1 + \dots \right) \right) \right\}.$$

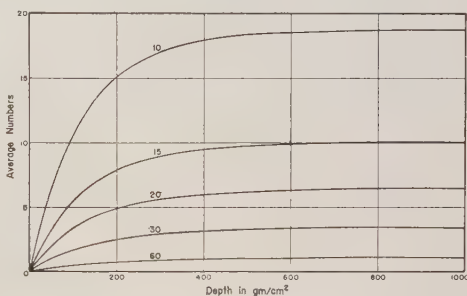


Fig. 3. - Average number of muons with energy $> E$ GeV in the atmosphere, assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the curves are the values of E .

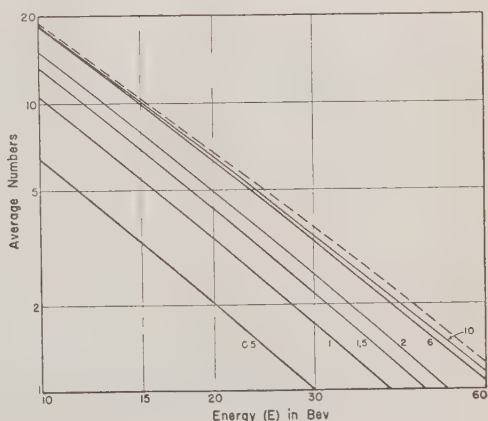
TABLE II. — Average number of charged pions with energy $> E$ GeV at depth x (in 100 g/cm²) in the atmosphere, assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

$E \backslash x$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	6	10
10	0	0.703	0.928	0.927	0.832	0.601	0.399	0.197	0.0914
15	0	0.534	0.716	0.728	0.666	0.492	0.347	0.185	0.0908
20	0	0.434	0.590	0.608	0.565	0.430	0.313	0.176	0.0903
30	0	0.319	0.442	0.465	0.442	0.353	0.269	0.164	0.0893
60	0	0.177	0.254	0.278	0.274	0.238	0.197	0.137	0.0847

TABLE III. — Average number of muons with energy $> E$ GeV at depth x (in 100 g/cm²) in the atmosphere, assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

$E \backslash x$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	6	10
10	0	6.44	10.6	13.3	15.1	17.0	17.9	18.5	18.7
15	0	3.31	5.48	6.92	7.93	8.98	9.50	9.91	10.1
20	0	2.03	3.40	4.31	4.94	5.67	6.03	6.34	6.49
30	0	1.01	1.70	2.18	2.53	2.92	3.13	3.33	3.46
60	0	0.291	0.497	0.645	0.759	0.895	0.978	1.07	1.14

Fig. 4. — Average number of muons with energy $> E$ in the atmosphere, assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the lines are the values of the depth x in 100 g/cm². The dotted line represents the first term in (39) for $x = 10$.



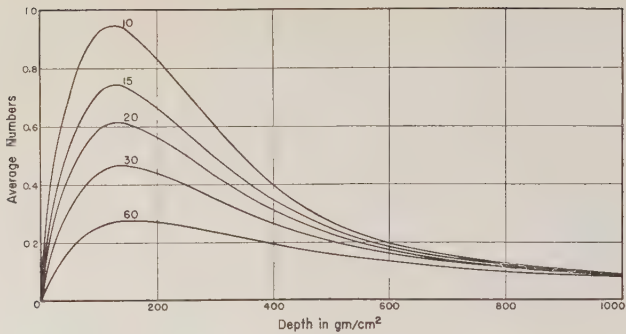


Fig. 5. — Average number of electrons with energy $> E$ GeV in the atmosphere, assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the curves are the values of E

TABLE IV. — Average number of electrons with energy $> E$ GeV at depth x (in 100 g/cm²) in the atmosphere, assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

$\begin{smallmatrix} x \\ E \end{smallmatrix}$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	6	10
10	0	1.04	1.60	1.66	1.48	0.956	0.540	0.144	0.00771
15	0	0.566	0.870	0.905	0.806	0.521	0.294	0.7083	0.00420
20	0	0.368	0.565	0.568	0.524	0.338	0.191	0.0508	0.00273
30	0	0.200	0.308	0.320	0.285	0.184	0.104	0.0277	0.00148
60	0	0.0707	0.109	0.113	0.101	0.0651	0.0367	0.00979	0.00525

TABLE V. — Average number of photons with energy $> E$ GeV at depth x (in 100 g/cm²) in the atmosphere, assuming a nucleon primary integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

$\begin{smallmatrix} x \\ E \end{smallmatrix}$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	6	10
10	0	2.69	3.27	3.06	2.59	1.58	0.869	0.226	0.0119
15	0	1.46	1.78	1.67	1.41	0.860	0.473	0.123	0.00648
20	0	0.951	1.16	1.08	0.914	0.559	0.307	0.0798	0.00421
30	0	0.517	0.629	0.590	0.498	0.304	0.167	0.0435	0.00229
60	0	0.183	0.222	0.208	0.176	0.108	0.0591	0.0154	0.000810

The first term in this expression can be evaluated from the results in Table I, the second term from results in Table II and the third by the same method of numerical integration as used in estimating (50). The results are given in Table III and Figs. 3 and 4.

(d) *Electrons and photons.* — From (42) and (48), the average numbers of electrons and photons with energies $> E > E_c$ GeV at depth x in the atmosphere due to a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ are

$$(55) \quad \begin{bmatrix} G(e; E, x) \\ G(p; E, x) \end{bmatrix} = (180/E)^{1.5} \left\{ e^{-0.7836x} \begin{bmatrix} 0.29075 \\ 0.44458 \end{bmatrix} + e^{-3.88087x} \begin{bmatrix} 0.014012 \\ -0.009520 \end{bmatrix} - e^{-x} \begin{bmatrix} 0.30485 \\ 0.43506 \end{bmatrix} \right\}.$$

The results are given in Table IV and Fig. 5 for electrons and in Table V and Fig. 6 for photons.

9. — Discussion.

The results given above are for the average numbers of particles in the different components of the cosmic radiation in the atmosphere. To convert the results to intensities (as usually measured by experimentalists), we use the fact that the primary spectrum $(180/E_0)^{1.5}$ to which our results are normalised corresponds to an intensity of $(180/E_0)^{1.5}$ units. For example, in calculating the intensity of muons with energy > 10 GeV at sea-level and at a latitude 52° N (for which $E_c = 2.2$ GeV), one uses the value $(1) 0.17 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$ for the primary intensity and the value 18.7 from Table III and finds for the required intensity

$$(18.7)(0.17)(2.2)^{1.5}/180^{1.5} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

The results for the nucleon component (equation (14) and Table I) show that the assumed primary power law spectrum persists at all depths; in the units of depth chosen the absorption is simply exponential.

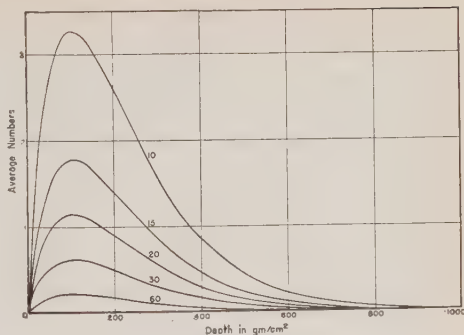


Fig. 6. — Average number of photons with energy $> E$ GeV in the atmosphere, assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$. The values attached to the curves are the values of E .

The results for the charged pions (Table II, Figs. 1 and 2) are particularly interesting. From Fig. 1 it is seen that a maximum intensity occurs at about 125 g/cm^2 , this maximum occurring at slightly greater depths for higher energies. A somewhat surprising behaviour of the curves is that, although they run together as x increases, they do not approach the x axis very rapidly. More precisely, it is predicted from the theory that whereas the average number of charged pions at sea-level ($x = 10$) with energy between 10 and 60 GeV is $0.0914 - 0.0847 = 0.0067$ (see Table II), the number with energy exceeding 60 GeV is 0.0847. This comparatively large number of very high energy charged pions is readily explained on our assumptions. The probability that a charged pion of energy E GeV created at a depth 90 g/cm^2 should reach sea-level without decaying is approximately $\exp[-400/E]$; hence the few very high energy pions created have a fair chance of not decaying. For example, if E is 40, the probability of not decaying $\approx 4 \cdot 10^{-5}$ and if E is 400, the probability ≈ 0.1 . This predicted preponderance of high energy charged pions compared with nucleons (a ratio as great as 25 for energies > 10 GeV) should provide a test of our assumption that the pions do not interact with nuclei. Direct experimental data on the high energy region of extensive air showers which we are considering are scarce. One can, however, make a comparison by considering the variation, with altitude, of the rate of very large bursts associated with extensive air showers (^{10, 11, 12}). STINCHOMB has shown that the very large bursts are not produced by the soft component, hence the penetrating component of extensive air showers must be the agent responsible for them. This result has been confirmed more recently by BRIDGE and REDIKER (¹³). From the latter results (¹²) one also finds the contribution of muons at various altitudes to the burst rate and hence deduces the burst rate due to nucleons and pions as a function of altitude. The experimental results show that the burst rate due to the nucleon-pion component differ by a factor of ≈ 14 between mountain altitudes and sea level, and that practically all the large bursts are produced by this component. The high energy nucleon component varies, over the same depths, by a factor of at least 20, and probably 30, according as to whether one takes 120 or 100 g/cm^2 to be the absorption mean free path in air. One can therefore argue that the nucleonic component cannot by itself account for all of the large bursts and that, therefore, the pions must play an important role. Now let us assume that high energy charged pions do give rise to bursts, then from Table II we see that their variation with height is much too small

(¹⁰) T. G. STINCHOMB: *Phys. Rev.*, **83**, 422 (1951).

(¹¹) M. SCHEIN and P. S. GILL: *Rev. Mod. Phys.*, **11**, 267 (1939).

(¹²) R. E. LAPP: *Phys. Rev.*, **69**, 321 (1946).

(¹³) H. S. BRIDGE and R. H. REDIKER: *Phys. Rev.*, **88**, 206 (1952).

to account for the observed experimental results. Our conclusion, therefore, is that high energy charged pions must interact with nuclei and that our assumptions of non-interacting energetic charged pions is incorrect. The question now arises, how strongly do the pions interact with nuclei. Is their interaction cross section geometric, are the products of pion-nucleon and nucleon-nucleus collisions distributed the same with respect to energy and with respect to the masses of the particles emitted? This latter point is indeed a difficult one and there is little experimental information to guide one. Let us, therefore, postulate for the present that for equal primary energies pion-nucleus and nucleon-nucleus interactions are the same. *Once we accept this postulate, then we may immediately state that $l(\pi) > l(n)$, that is, the interaction cross-section for high energy charged pions must be less than the interaction cross section for nucleons.* This may easily be seen from the fact that for the above postulate and $l(\pi) = l(n)$, the decrease in the number of pions would be at least as fast as the decrease of nucleons. In order, therefore, to reconcile theory with experiment it appears that we must assume that charged pions interact with nuclei, but with $l(\pi) > l(n)$. Fig. 2 shows that on the present theory the spectrum of charged pions at a fixed depth follows approximately a power law, the exponent decreasing with depth (see Table VI).

TABLE VI. — *Value of exponent of approximate integral power law spectrum of high energy charged pion for various depths in the atmosphere (x measured in 100 g/cm²).*

x	0.5	1	1.5	2	3	4	6
negative exponent	.73	.64	.60	.58	.49	.34	.17

From Fig. 3 it is seen that there is no maximum for the muons but their average number increases rapidly at first, then more slowly, throughout the atmosphere. This behaviour is, of course, the consequence of assuming that the muons do not decay or interact, so that once formed they suffer no energy loss. A comparison between the muon component and the nucleon and charged pion components (see Fig. 7) shows that the muons dominate at all except small depths. The hard component ($T + \pi + \mu$) is predominantly muons at sea-level and up to about 8000 metres. Above this level the proportion of nucleons becomes significant and results for the component which can penetrate the limited amount of lead which can be flown to greater heights will not be a good measure of the muons because of the likelihood of the generation of an electron-photon shower from a collision of a nucleon in the lead. From Fig. 4 it is seen that at any depth in the atmosphere the integral spectrum is

very nearly a power law with exponent 1.6 (i.e. 7% greater than the exponent assumed for the nucleons). If, as we have shown above, highly energetic

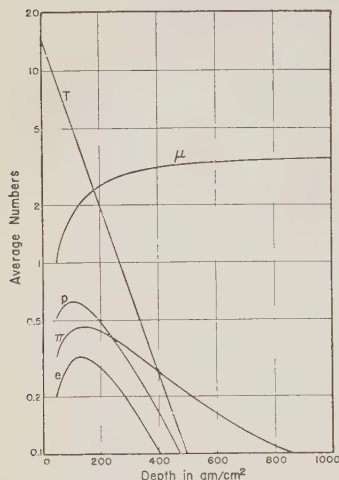


Fig. 7. — Average numbers of nucleons (T), charged pions (π), muons (μ), electrons (e), and photons (p) with energy > 30 GeV assuming a primary nucleon integral spectrum $(180/E_0)^{1.5}$.

pions do in fact interact with nuclei then the average number of muons will naturally be decreased since there would now be competition between interaction and decay of the charged pions. However, the qualitative behaviour given in Fig. 3 for the muons would be much the same.

The total meson component (charged pions plus muons) is given very nearly at very high energies by just the first term in (39); and since this term, like the average numbers for nucleons, is proportional to $(E_c/E)^{\gamma}$, the ratio $(\pi + \mu)/T$ should be independent of the cut-off energy E_0 (and hence the altitude). It is also independent of the lower limit of the energy of the nucleons and pions, provided this has the same value E for each and that E is sufficiently great that the assumptions on which our numerical calculation of the pions and muons were made still hold; i.e., $E > 10$ GeV. In Table VII (first line) the ratio of mesons to nucleons is tabulated for various depths in the atmosphere.

TABLE VII. — Ratios of average numbers of various components for different values of the depth x in the atmosphere (x in 100 g/cm^2) and for $E > 10$ GeV.

x ratio	0	0.5	1	1.5	2	2	4	6	10
$(\pi + \mu)/T$	0	.15	.40	.82	1.6	4.5	.13	.96	5.300
e/p	—	.39	.49	.54	.57	.60	.62	.64	.65
e/T	0	.022	.057	.098	.15	.25	.39	.76	2.2
p/T	0	.058	.12	.18	.26	.42	.62	1.2	3.4
$e/(T + \pi + \mu)$	0	.019	.039	.053	.057	.045	.027	.0076	.00041
$p/(T + \pi + \mu)$	0	.051	.081	.098	.10	.074	.044	.012	.00063

The ratio π/μ will depend on E and can be calculated from Tables II and III.

The results for the electrons and photons (Tables IV and V, Figs. 5, 6 and 7) are much the same, showing a maximum at about 125 g/cm^2 and then a rapid decrease at larger depths. At any fixed depth the spectrum is a power law with the same exponent as for the nucleons. Ratios such as e/p , e/T , etc., will be independent of latitude and the energy E (provided this is the same for the different components and $E > 10 \text{ GeV}$); the more interesting ratios are tabulated in Table VII. The number of electrons is less than the number of photons, their ratio increasing from 0.39 at 50 g/cm^2 to .65 at sea-level. The ratios of electrons to nucleons, and of photons to nucleons, are just a few per cent at small depths, increase slowly at first, then more rapidly, as the depth increases. The ratios of electrons and photons to the hard component ($T + \pi + \mu$) show maxima at about 200 g/cm^2 and then fall off rapidly. Similar behaviour is found for the ratio of the soft and hard components. It should be stressed at this point that our results for the soft component will not be very sensitive as to whether or not charged pions interact with nuclei. This is due to the fact that on our model the energetic soft component arises predominantly from the decay of neutral pions, the lifetimes of which are too short to allow them to interact with nuclei. It is true that the charged pions could create further neutral pions in pion-nucleus interactions, but this effect should not be great.

In the present work, though we have given the theory covering a wide range of models for the development of extensive air showers in matter, numerical results were presented for the high energy region on one specific model only. We are now considering the model suggested by the present work, wherein pions interact with nuclei. In this instance it is hoped to give numerical results for both the high and low energy regions, thus allowing a more detailed comparison to be made between theory and experiments on extensive air showers. Since it is a characteristic of cascade theory that results for the higher energies are the more reliable, it should allow quantitative analyses to be made of experiments which deal with the exceedingly energetic components of extensive air showers.

The authours wish to thank Professors H. S. GREEN and M. SCHEIN for many stimulating and helpful discussions.

RIASSUNTO (*)

Il lavoro presenta una teoria degli sciami dei raggi cosmici basata sulle seguenti ipotesi: si ammette che la primaria sia formata da nucleoni; i nucleoni generano la componente pionica per collisione coi nuclei; i pioni carichi si disintegrano in muoni; i pioni neutri si disintegrano in fotoni che danno inizio alla componente molle. Si danno risultati numerici dettagliati per i numeri medi (o intensità) delle varie componenti a differenti profondità nell'atmosfera e per differenti intervalli d'energia. (In questo lavoro si considerano solo particelle con energie > 10 GeV). La teoria prevede che i pioni e le componenti molli carichi presentino un massimo a circa 125 g/cm^2 e che il numero dei muoni (di alta energia) aumenti con la profondità senza presentare alcun massimo. La radiazione è prevalentemente composta di muoni fino a circa 8000 m e il numero dei pioni carichi di alta energia al livello del mare è molto maggiore del numero dei nucleoni di alta energia. Quest'ultima caratteristica fornisce una prova dell'ipotesi che nell'atmosfera i pioni di alta energia non interagiscano coi nuclei. Si conclude che i pioni carichi di alta energia debbono interagire coi nuclei e che il loro percorso d'interazione medio è maggiore di quello dei nucleoni. La componente *mesonica totale* e la radiazione totale seguono con buona approssimazione una legge esponenziale con lo stesso esponente ammesso per i nucleoni primari.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Sulla distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi.

M. CRESTI, A. LORIA e G. ZAGO

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 16 Marzo 1953)

Riassunto. — È stata dedotta direttamente da misure angolari in camera di Wilson la distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi per due diverse densità medie: i risultati sono in buon accordo con quelli ottenuti da altri con contatori. Si sono anche derivati valori approssimati per eccesso dei cammini di assorbimento in aria per gli sciami delle due densità considerate.

La distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi è stata sempre descritta con una funzione del tipo $\cos^n \theta$, perchè questa approssima, per piccoli angoli, la legge esponenziale prevista teoricamente, e vale con lo stesso esponente anche se si sostituiscono agli angoli zenitali le loro proiezioni su un piano verticale qualsiasi; ciò ha consentito talvolta, in misure fatte con la camera di Wilson, di usare senz'altro gli angoli che le tracce fanno con la verticale sull'immagine fotografica.

Le misure di n possono dividersi in due gruppi, diversi tra loro tanto per i metodi usati, quanto per i risultati ottenuti. Infatti DAUDIN ⁽¹⁾, DEUTSCHMANN ⁽²⁾ e WILLIAMS ⁽³⁾ con la camera di Wilson trovano $n \geq 8$, mentre KRAYBILL ⁽⁴⁾ e BASSI e coll. ⁽⁵⁾, con contatori, trovano per n valori compresi fra 4 e 5.

⁽¹⁾ J. DAUDIN: *Journ. de Phys.*, **6**, 302 (1945).

⁽²⁾ M. DEUTSCHMANN: *Zeits. Naturforsch.*, **2a**, 61 (1947).

⁽³⁾ R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948).

⁽⁴⁾ H. L. KRAYBILL: *Phys. Rev.*, **77**, 410 (1950).

⁽⁵⁾ P. BASSI, A. M. BIANCHI, D. CADORIN e C. MANDUCHI: *Nuovo Cimento*, **9**, 1037 (1952).

A sè sta il risultato di BROWN e MCKAY ⁽⁶⁾, che, pur usando una camera di Wilson, trovano $n = 5$. Il disaccordo fra questo e gli altri risultati ottenuti con lo stesso strumento, è dovuto alla selezione degli eventi molto ristretta ed obbediente ad esigenze estranee al problema.

La differenza fra i due valori di n ottenuti rispettivamente con i contatori e con la camera, può spiegarsi se si tien conto che, mentre i dispositivi di contatori adottati rivelavano tutte le particelle degli sciami, anche se incoerenti, per la camera si era ritenuto necessario richiedere la presenza di un minimo di tracce parallele per poter definire una direzione da assumersi come direzione dello sciame. Ciò ha spostato la statistica verso le zone più vicine agli assi degli sciami, per i quali sembra plausibile una distribuzione zenitale più ripida di quella delle particelle, anche se debba ritenersi alquanto lontana dalla realtà la teoria finora sviluppata, che prevede una distribuzione zenitale degli assi approssimabile addirittura con un $\cos^{18} \vartheta$ ^(7,8), tale teoria è infatti puramente elettromagnetica e si limita alla considerazione di elettroni di alta energia per i quali trascura lo scattering coulombiano nell'aria.

Dispositivo sperimentale.

La misura è stata compiuta a 2000 metri s.l.m. con un dispositivo costituito da una camera di Wilson posta nel centro di un triangolo equilatero di m 4,5 di lato ai cui vertici si trovavano tre piatti di contatori. Lo spessore di materiale assorbente attraversato dalle particelle non superava i 3 g/cm². Le fotografie venivano prese con una coppia di obbiettivi ad assi ottici paralleli e sono state riproiettate mediante lo stesso sistema ottico per ricostruire nello spazio la posizione delle tracce e misurarne quindi l'angolo zenitale, che veniva determinato a meno di 2°.

Abbiamo incluso nella statistica solo le particelle il cui angolo col piano normale all'asse della camera non superava i 15°; per queste la diminuzione dell'area sensibile della stessa era inferiore al 4%. I contatori erano disposti con gli assi paralleli a quello della camera e distanziati fra loro in modo che l'area sensibile dei piatti restava invariata, per direzioni contenute nel piano sopra considerato, fino all'angolo zenitale di 50°, a cui abbiamo limitato lo studio della distribuzione zenitale.

Data la prevalenza numerica negli sciami delle particelle con piccolo angolo zenitale, si può ritenere che le fotografie in cui ne compaiono di molto inclinate siano dovute nella maggior parte dei casi all'arrivo sui piatti di particelle

⁽⁶⁾ W. W. BROWN e A. S. MCKAY: *Phys. Rev.*, **76**, 1034 (1949).

⁽⁷⁾ L. JANOSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), p. 318.

⁽⁸⁾ P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 446 (1951).

di sciame aventi inclinazione media minore: si ha quindi ragione di ritenere costante anche l'area sensibile dei piatti per le particelle che comandavano gli eventi.

Gli accorgimenti adottati hanno limitato il numero delle particelle prese in considerazione nella statistica, ma hanno risparmiato le correzioni per variazione delle aree sensibili in funzione della direzione di provenienza: abbiamo ritenuto opportuno evitarle, perchè, quando in una fotografia compaiono tracce provenienti da varie parti, nulla si può dire a priori sulla direzione di quelle che hanno azionato i contatori, ed ogni induzione ci sembra molto azzardata anche quando se ne presentano alcune parallele.

Per quanto sopra le misure dirette riguardano un intervallo azimutale che, per angoli zenitali inferiori a 15° , vale 360° ma scende a 25° per l'angolo zenitale di 50° a cui abbiamo limitato la ricerca. L'integrazione sull'intero angolo giro è stata fatta nell'ipotesi di un'isotropia azimutale che pare sicura ⁽⁵⁾.

Risultati ottenuti.

Sono state prese due serie, l'una di 410 e l'altra di 650 fotografie. Si sono così ottenuti approssimativamente gli stessi numeri di tracce con piatti di area sensibile 200 e 800 cm², mediante i quali si sono selezionati sciame di diversa densità media; per ognuna di esse è stata fatta separatamente la distribuzione zenitale delle particelle.

A determinare quale percentuale delle medesime era in casuale contemporaneità con quelle appartenenti a sciame, ha servito una terza serie di 500 fotografie scattate a caso. Delle particelle qui trovate si è fatta pure la distribuzione zenitale che, previa normalizzazione, è stata sottratta dalle due precedenti.

In fig. 1 è riportato:

a) l'istogramma della distribuzione ottenuta coi piatti di 200 cm² e, tratteggiato, quello delle casuali normalizzato;

b) l'istogramma delle differenze, ridotte ad angoli solidi uguali; in fig. 2 i dati analoghi ottenuti coi piatti di 800 cm².

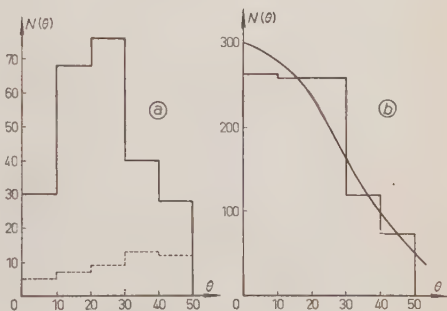


Fig. 1.

Le curve continue rappresentano le funzioni $\cos^n \vartheta$ in cui n si è ottenuto riportando in coordinate doppie logaritmiche $N(\vartheta)$ in funzione di $\cos \vartheta$.

Il valore dell'esponente del coseno nei due casi è:

$$\begin{aligned} n &= 3,8 \pm 0,8 && \text{per piatti di area } 200 \text{ cm}^2, \\ n &= 5,3 \pm 0,9 && \text{per piatti di area } 800 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Una statistica delle fotografie in funzione del numero di tracce che contenevano, corretta per la presenza delle casuali, è stata confrontata con quella che si ricava dalla teoria degli sciami secondo la nota formula ⁽⁹⁾:

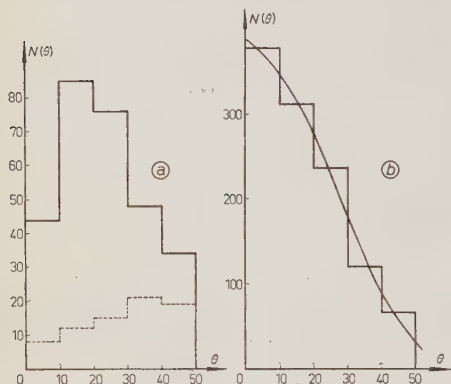


Fig. 2.

$$N(m) = \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-s\Delta})^3 e^{-s'\Delta} \frac{(s'\Delta)^m}{m!} \Delta^{-(\gamma+1)} d\Delta}{\int_0^{\infty} (1 - e^{-s\Delta})^3 \Delta^{-(\gamma+1)} d\Delta}$$

ove s è l'area di un piatto di contatori, s' l'area della sezione del volume sensibile della camera con un piano qualsiasi passante per il suo asse, $N(m)$ la frazione di fotografie contenenti m tracce e γ l'esponente

dello spettro di densità degli sciami per cui si è assunto il valore 1,5. Confrontando gli $N(m)$ relativi ai due intervalli di densità con i dati sperimentali, si nota un ottimo accordo fra la distribuzione prevista dalla teoria e quella osservata (Tab. I).

TABELLA I.

$N(m)$	0	1	2	3	4	5	> 5
$s = 200 \text{ cm}^2$ {							
Calcolati	0,529	0,245	0,106	0,049	0,024	0,014	0,033
Osservati	0,510	0,245	0,113	0,053	0,023	0,015	0,041
$s = 800 \text{ cm}^2$ {							
Calcolati	0,807	0,145	0,030	0,009	0,003	0,002	0,004
Osservati	0,790	0,145	0,039	0,011	0,004	0,003	0,008

Conclusioni.

Un confronto fra i valori trovati di n con i risultati precedentemente ottenuti in camera di Wilson, mostra che le particelle degli sciami hanno una distri-

⁽⁹⁾ A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **4**, 102 (1947).

buzione zenitale molto più piatta di quella degli assi; c'è invece accordo con i risultati delle misure con contatori. Come BASSI e coll. ⁽⁵⁾, abbiamo anche trovato che n aumenta al diminuire della densità degli sciami registrati.

La legge $\cos^n \vartheta$ è stata introdotta per comodità di misura, mentre la dipendenza è, in realtà, del tipo

$$N(\vartheta) = N(0) \exp [-t/t_0 \cos \vartheta],$$

in cui t indica lo spessore d'aria sovrastante in g/cm^2 , e che deriva direttamente dallo spettro di assorbimento in aria degli sciami nell'ipotesi dell'isotropia dei primari. Confrontando direttamente i nostri dati con tale distribuzione abbiamo ricavato il valore di t_0 , cammino di assorbimento in aria per gli sciami estesi.

I valori ottenuti sono:

$$t_0 = 220 \pm 40 \text{ g/cm}^2 \quad \text{per piatti di area } 200 \text{ cm}^2,$$

$$t_0 = 180 \pm 30 \text{ g/cm}^2 \quad \text{per piatti di area } 800 \text{ cm}^2.$$

I valori trovati per t_0 sono maggiori di quelli ricavati da altri direttamente (vedi, per esempio, DAUDIN, op. cit., § 4); essi sono infatti approssimati per eccesso perchè, a causa dello scattering nell'aria sopra la camera, una particella di data inclinazione può avere attraversato l'atmosfera facendo un angolo medio con la verticale diverso, ed in genere minore.

Al valore esatto di t_0 si potrebbe tendere per estrapolazione, facendo misure di dipendenza angolare delle particelle degli sciami sotto spessori crescenti di assorbente, prendendo così in considerazione particelle di energia sempre maggiore e quindi sempre meno soggette a forti deviazioni per scattering.

Ringraziamo il prof. A. ROSTAGNI per l'interessamento con cui ha seguito il lavoro, i dottori P. BASSI, P. BUDINI e D. CADORIN per utili discussioni ed il dott. L. GUERRIERO per il valido aiuto prestato.

Esprimiamo infine la nostra viva riconoscenza alla Società Adriatica di Elettricità per l'essenziale appoggio accordatoci.

SUMMARY

Zenithal distributions for two average densities of particles of extensive air showers have been deduced directly from angular measurements in a cloud chamber: these results are in good agreement with those obtained by other workers using counters. Upper limits for the attenuation length values have also been derived.

Differential Conservation Laws in Non-local Field Theories (*).

J. RZEWUSKI

Institute for Theoretical Physics, Bolesław Bierut University - Wrocław, Poland

(ricevuto il 24 Marzo 1953)

Summary. — It is investigated to what extent conservation laws are satisfied in non-local field theories. First it is shown that from the invariance of the action integral with respect to gauge transformations of the first kind, translations and rotations of space-time there follow the integral conservation laws. These integral laws express that certain functionals of a space-like surface σ have equal values at the boundaries σ_1 and σ_2 of the domain of space-time considered in the problem. These functionals have the disadvantage of being not constant in the region between σ_1 and σ_2 . Another disadvantage is, that they do not correspond with the local charge, momentum and angular momentum. It is shown further, that starting with the Euler-Lagrange field equations it is possible to construct other functionals of σ being constant throughout the region (σ_1, σ_2) and satisfying at the same time the correspondence principle. These functionals may, therefore, be interpreted as the total charge, momentum and angular momentum of the non-local system. The integral conservation laws follow from the differential laws if the condition of invariance with respect to the three above types of transformations is satisfied. The general considerations are illustrated on a simple example of a non-local field theory.

Introduction.

Consider the following functional (action integral) containing integrals of various multiplicity

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = \sum_n W^n, \\ W^n = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \dots \int dx^1 \dots dx^n L^n[x^1, \dots, x^n; q^\alpha(x^1), \dots, q^\alpha(x^n); \dots q_{\nu_1 \dots \nu_s}^\alpha(x^1), \dots, q_{\nu_1 \dots \nu_s}^\alpha(x^n)] . \end{array} \right.$$

(*) A short account of this investigation was published in *Nuovo Cimento*, **10**, 182 (1953).

x^k denotes here a point in Minkowski's space with the coordinates x_μ^k ($\mu = 1, 2, 3, 4$; $x_4^k = ix_0^k$) and $dx^k = dx_1^k dx_2^k dx_3^k dx_0^k$ is a volume element in this space. The integration domain is a region of space-time contained between two space-like surfaces σ_1 and σ_2 . L^n is a function of the fields $q^\alpha(x^k)$ and their derivatives $q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha(x^k)$ up to some order s ($i = 1, 2, \dots, s$), but may also depend on the points x^k ($k = 1, 2, \dots, n$) explicitly. (The index α numbers the fields).

From the functional (0.1) a field theory may be derived by considering variations of W due to variations of the fields q^α and the independent variables x_μ^k .

We shall define as local this type of field theories for which $W^1 \neq 0$, $W^n \equiv 0$ for $n \geq 2$. Other types of theories we shall call non-local.

In local theories differential conservation laws follow from certain invariance properties of the functional (0.1) (cf. E. NOETHER, 1918). Thus the conservation of charge follows from the invariance with respect to gauge transformations of the first kind and the conservation of momentum and angular momentum follow from the invariance with respect to translations and rotations of space-time.

The invariance properties are, of course, connected with the structure of the Lagrange function L^1 . Thus e.g. invariance with respect to translations is equivalent with the explicit independence of L^1 on x^1 . If L^1 depends explicitly on x^1 the momentum is not conserved, which means that the system under consideration is acted upon by an external system and there occurs exchange of momentum between both of them.

The situation is quite different in the case of non-local field theories as may be easily seen from the following example. Take the functional $W = W^1 + W^2$. In this case invariance with respect to translations exists even if L^2 depends explicitly on x^1 and x^2 under the condition that only differences of the coordinates, $x_\mu^1 - x_\mu^2$, occur in L^2 . The explicit dependence on x^1 and x^2 arises here from the non-local character of the system and has nothing to do with external interactions. In fact it is necessary in any non-local theory in order to obtain correspondence with local theories as shall be seen from the example in section 4.

A similar situation presents itself in connection with rotations of space-time.

Thus one should expect that also in non-local theories conservation laws are satisfied as a result of the invariance properties of the variational principle, in spite of the explicit occurrence of the space-time variables. In the following we shall investigate to what extent this is the case.

The first section is devoted to the general formulation of non-local theories as derivable from the functional (0.1). In the second section the so called integral conservation laws are derived. The establishment of differential conservation laws is the subject of the third section. The last section contains an example of a non-local field theory.

1. — General formulation.

We assume that of the space-like surfaces σ_1 and σ_2 occurring in (0.1) σ_1 is earlier than σ_2 . This has to mean that any straight line parallel to the x_0 -axis passes the surfaces in two points x^1 and x^2 such that $x_0^1 < x_0^2$. σ_1 and σ_2 may extend to infinity in space-like directions, but they may also join to enclose a finite space-time region. For practical calculations it is sometimes convenient to put σ_1 into $-\infty$ and σ_2 into $+\infty$ so that the domain of integration becomes the whole of space-time.

Let us consider variations of the independent variables x_μ consisting of infinitesimal translations and rotations of space-time

$$(1.1) \quad \delta x_\mu = x_\mu - x'_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad \partial_\nu \delta x_\mu = \varepsilon_{\nu\mu}, \quad \partial_\nu \delta x_\nu = 0,$$

and infinitesimal variations $\delta_0 q^\alpha$ of the fields q^α consisting of an arbitrary change in the functional form of q^α independent on the change (1.1) of the coordinates.

The change in the functional (0.1) caused by these two variations is

$$(1.2) \quad \delta W = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \partial_\nu p_\nu^\alpha \right\} \delta_0 q^\alpha + \left(\int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_1} \right) d\sigma_\tau \left\{ L \delta x_\tau + \sum_{i=0}^{s-1} p_{\nu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha \delta_0 q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha \right\},$$

where L is a generalization of the Lagrange function which we shall call Lagrange functional

$$(1.3) \quad L = \sum_n \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \dots \int dx^1 \dots dx^{n-1} \sum_{m=1}^n L^\alpha(x^m \rightarrow x).$$

The notation $(x^m \rightarrow x)$ indicates that in the sum over m the x^m has to be replaced by x . The remaining $n-1$ variables are then numerated from 1 to $n-1$. The order is arbitrary in view of the $n-1$ integrations over the same region.

The independent variables x_μ and the dependent variables $q^\alpha(x)$, $q_{\nu_1}^\alpha(x)$, ..., $q_{\nu_1 \dots \nu_s}^\alpha(x)$ appear in ζ in two ways: (i) explicitly as functions of the points x_μ and (ii) implicitly by means of integrals over the region (σ_1, σ_2) . The differential operators $\partial/\partial x_\mu$ and $\partial/\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha$ operate always only on the explicitly occurring variables.

The $p_{\nu_1 \dots \nu_k}^\alpha$ occurring in (1.2) are the generalized momenta defined by

$$(1.4) \quad p_{\nu_1 \dots \nu_k}^\alpha = \sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \partial_{\mu_1 \dots \mu_i} \frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_k \mu_{i+1} \dots \mu_s}^\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

They satisfy the following obvious s identities

$$(1.5) \quad p_{v_1 \dots v_k}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_{v_1 \dots v_k}^\alpha} - \partial_v p_{v_1 \dots v_k}^\alpha, \quad k = 1, \dots, s-1,$$

$$(1.6) \quad p_{v_1 \dots v_s}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_{v_1 \dots v_s}^\alpha}.$$

The convention about summation over dummy indices is adopted for the tensor indices v_i as well as for the numerating upper index α . (The index α describes, of course, also the transformation character of the various fields).

If the fields q^α satisfy the generalized Lagrange equations

$$(1.7) \quad \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \partial_v p_v^\alpha = 0,$$

which in the case of non-local field theories are integro-differential equations, then the space-time integral in (1.2) vanishes and the variation δW becomes a difference of two surface integrals

$$(1.8) \quad \delta W = F(\sigma_2) - F(\sigma_1),$$

with

$$(1.9) \quad F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_v \left\{ L \delta x_v + \sum_{i=0}^{s-1} p_{vv_1 \dots v_i}^\alpha \delta_0 q_{v_1 \dots v_i}^\alpha \right\}.$$

For the purpose of establishing conservation laws it is necessary to express the variation $\delta_0 q_{v_1 \dots v_i}^\alpha$ in (1.9) by the total variation $\delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha$ being a sum of the independent variation $\delta_0 q_{v_1 \dots v_i}^\alpha$ and of that infinitesimal change in the fields $q_{v_1 \dots v_i}^\alpha$ which is due to the variation of the coordinates (1.1):

$$(1.10) \quad \delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha = \delta_0 q_{v_1 \dots v_i}^\alpha + q_{\mu v_1 \dots v_i}^\alpha \delta x_\mu + \varepsilon_{\delta_0} S_{\delta_0 v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha\beta} q_{\mu_1 \dots \mu_i}^\beta,$$

where $S_{\delta_0 v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha\beta}$ describes the transformation character of the field $q_{\mu_1 \dots \mu_i}^\alpha$.

Putting (1.10) into (1.9) we get

$$(1.11) \quad F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_v \left\{ L \delta x_v + \sum_{i=0}^{s-1} p_{vv_1 \dots v_i}^\alpha [\delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha - q_{\mu v_1 \dots v_i}^\alpha \delta x_\mu - \varepsilon_{\delta_0} S_{\delta_0 v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha\beta} q_{\mu_1 \dots \mu_i}^\beta] \right\}.$$

The last term in this equation may be written in the simple form

$$(1.12) \quad \sum_{i=0}^{s-1} p_{vv_1 \dots v_i}^{\alpha} S_{\delta \varrho v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha \beta} q_{\mu_1 \dots \mu_i}^{\beta} \varepsilon_{\delta \varrho} = f_{[\nu \delta] \varrho} \varepsilon_{\delta \varrho} = f_{[\nu \delta] \varrho} \partial_{\delta} \delta x_{\varrho},$$

where $f_{[\nu \delta] \varrho}$ is a tensor, antisymmetrical in its first two indices, defined by the equation

$$(1.13) \quad f_{[\nu \delta] \varrho} = \sum_{i=0}^{s-1} \{ p_{vv_1 \dots v_i}^{\alpha} S_{\delta \varrho v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha \beta} + p_{\varrho v_1 \dots v_i}^{\delta} S_{\delta \nu v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha \beta} + p_{\delta v_1 \dots v_i}^{\alpha} S_{\varrho \nu v_1 \dots v_i \mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha \beta} \} q_{\mu_1 \dots \mu_i}^{\beta}.$$

The equality (1.12) holds on account of the symmetry of the last two terms in (1.13) with respect to the indices δ and ϱ .

Because of the antisymmetry of $f_{[\nu \delta] \varrho}$ we may integrate the last surface integral in (1.11) by parts. Neglecting contributions from the infinitely remote points on the surface σ we get the following expression for $F(\sigma)$:

$$(1.14) \quad F(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} \left\{ T_{\nu \mu} \delta x_{\mu} + \sum_{i=0}^{s-1} p_{vv_1 \dots v_i}^{\alpha} \delta q_{\nu_1 \dots \nu_i}^{\alpha} \right\},$$

with

$$(1.15) \quad T_{\nu \mu} = \delta_{\nu \mu} L - \sum_{i=0}^{s-1} p_{vv_1 \dots v_i}^{\alpha} q_{\mu \nu_1 \dots \nu_i}^{\alpha} - \partial_{\lambda} f_{[\lambda \nu] \mu}.$$

2. - Integral conservation laws.

In the above formulation of the variational principle the integral conservation laws follow directly from the invariance properties of the basic functional (0.1). Indeed, if the functional (0.1) is invariant with respect to any of the transformations (1.1) and (1.10), we have necessarily $\delta W = 0$ for the corresponding transformation. The relation (1.8) yields, therefore, for the functional $F(\sigma)$ corresponding to the special type of transformation considered, the equation

$$(2.1) \quad F(\sigma_2) = F(\sigma_1).$$

This equation states that the functional $F(\sigma)$ has equal values on the two boundary surfaces σ_1 and σ_2 .

We shall derive here the particular form of $F(\sigma)$ corresponding to the three types of transformations: gauge transformations of the first kind given by

$$(2.2) \quad \delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha = -ie\epsilon\eta_i^\alpha q_{v_1 \dots v_i}^\alpha, \quad (i = 0, 1, \dots, s-1), \quad \delta x_\mu = 0,$$

translations (cf. 1.1)

$$(2.3) \quad \delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, s-1), \quad \delta x_\mu = \epsilon_\mu,$$

and rotations (cf. 1.1)

$$(2.4) \quad \delta q_{v_1 \dots v_i}^\alpha = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, s-1), \quad \delta x_\mu = -\epsilon_{\mu\nu}x_\nu, \quad (\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}).$$

Here ϵ , ϵ_μ , $\epsilon_{\mu\nu}$ are infinitesimal constants. The constant e is, as we shall see, connected with the charge of the system. $\eta_i^\alpha = 0, \pm 1$ according to whether the corresponding field q^α is real or complex.

Introducing (2.2) into (1.14) we get

$$(2.5) \quad F(\sigma) = \epsilon Q'(\sigma) = \epsilon \int_\sigma d\sigma_\mu j_\mu, \quad j_\mu = -ie \sum_{i=0}^{s-1} p_{\mu v_1 \dots v_i}^\alpha \eta_i^\alpha q_{v_1 \dots v_i}^\alpha.$$

From (2.3) and (1.14) there follows

$$(2.6) \quad F(\sigma) = \epsilon_\mu P'_\mu(\sigma) = \epsilon_\mu \int_\sigma d\sigma_\nu T_{\nu\mu},$$

and finally from (2.4) and (1.14)

$$(2.7) \quad F(\sigma) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M'_{\mu\nu}(\sigma) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \int_\sigma d\sigma_\lambda M_{\lambda\mu\nu}, \quad M_{\lambda\mu\nu} = x_\mu T_{\lambda\nu} - x_\nu T_{\lambda\mu}.$$

The integral conservation laws resulting from the invariance of the basic functional (0.1) with respect to gauge transformations, translations and rotations are, therefore,

$$(2.7) \quad Q'(\sigma_2) = Q'(\sigma_1), \quad P'_\mu(\sigma_2) = P'_\mu(\sigma_1), \quad M'_{\mu\nu}(\sigma_2) = M'_{\mu\nu}(\sigma_1).$$

To go over from the integral to the differential conservation laws one has to choose the surfaces σ_1 and σ_2 in such a way that they overlap everywhere except for the neighbourhood of a certain point x , thus enclosing a small

volume element $\delta\omega$ around this point. Writing $F(\sigma)$ in the general form

$$(2.8) \quad F(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} f_{\nu},$$

corresponding to any of the functionals (2.5-7) we have from (2.1)

$$(2.9) \quad 0 = \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\delta\omega} = \frac{1}{\delta\omega} \left(\int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_1} \right) d\sigma_{\nu} f_{\nu} = \frac{1}{\delta\omega} \oint d\sigma_{\nu} f_{\nu},$$

where \oint denotes surface integration over the closed surface around $\delta\omega$.

Any of the quantities εj_{ν} , $\varepsilon_{\mu} T_{\nu\mu}$, $\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\delta} M_{\nu\delta}$ represented in (2.9) by f_{ν} consists of two parts. One of them f_{ν}^1 corresponding to the first term W^1 in the functional (0.1) is a function of the point x only. The other part $f_{\nu}^2 + f_{\nu}^3 + \dots$ corresponding to $W^2 + W^3 + \dots$ in (0.1) is also a function of x but contains besides volume integrals over the region between σ_1 and σ_2 . In the limiting case $\delta\omega \rightarrow 0$, therefore, this second part vanishes and we get from (2.9)

$$(2.10) \quad 0 = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\delta\omega} = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\omega} \int d\sigma_{\nu} (f_{\nu}^1 + f_{\nu}^2 + f_{\nu}^3 + \dots) = \partial_{\nu} f_{\nu}^1.$$

Putting for f_{ν}^1 its values corresponding to (2.5-7) we get from (2.10) three differential conservation laws

$$(2.11) \quad \partial_{\nu} j_{\nu}^1 = 0, \quad \partial_{\nu} T_{\nu\mu}^1 = 0, \quad \partial_{\lambda} M_{\lambda\nu\mu}^1 = 0.$$

The same limiting process must be carried out in the Euler-Lagrange equations (1.7) and in the identities (1.5-6). This results in replacing everywhere L by L^1 so that e.g. the field equations become (cf. 1.4)

$$(2.12) \quad \frac{\partial L^1}{\partial q^{\alpha}} - \partial_{\nu} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \partial_{\mu_1 \dots \mu_i} \frac{\partial L^1}{\partial q_{\nu\mu_1 \dots \mu_i}^{\alpha}}.$$

Thus in the limiting case $\delta\omega \rightarrow 0$ we get a local theory derivable from the local part W^1 of the basic functional (0.1). For this theory the differential conservation laws (2.11) follow from the integral laws (2.7) and the corresponding densities j_{μ}^1 , $T_{\nu\mu}^1$, $M_{\lambda\nu\mu}^1$ may be viewed as current, energy momentum and angular momentum densities of the system.

The limiting process (2.10) gives no information about the non-local quantities j_{μ} , $T_{\nu\mu}$, $M_{\lambda\nu\mu}$ and we shall have to use other means to establish differential conservation laws in the general case of a non-local theory.

It may be noticed that in the local case differential conservation laws of the form (2.11) are satisfied independently on the order of derivatives occurring in L^1 . (This order may even tend to infinity if the corresponding series

converge uniformly). In the literature theories containing derivatives of higher order than one in the Lagrangean are usually called non-local even if $W^n \equiv 0$ for $n \geq 2$. We have preferred to classify them as local theories (Introduction) taking as a natural criterion the form of conservation laws. Another criterion is the possibility of differential quantization for all local theories independently on the order of derivatives occurring in the Lagrangean L^1 (cf. e.g. RZEWUSKI, 1952). Non-local theories allow, so far, only the construction of an S -matrix which may be called integral quantization (cf. e.g. RZEWUSKI, 1951).

It is true that in certain cases there is equivalence between local theories with higher order derivatives and non-local theories with first order derivatives in the description of collision problems (S -matrix) (cf. RZEWUSKI, 1951, 1952). The physical meaning of this equivalence is that one may obtain the same physical results by modifying the forces acting between point particles (local theories with higher order derivatives), as well as by leaving the forces unchanged and giving the particle a structure (extending it) by means of properly chosen form-factors (non-local theories).

Since the mathematical formalism as well as the corresponding physical picture are different in both cases, the classification adopted in this paper seems natural.

We have seen that the integral conservation laws (2.7) offer no information about the differential behaviour of the densities j_μ , $T_{\nu\mu}$, $M_{\lambda\nu\mu}$. This may seem natural from physical reasons. Introduction of non-localities is equivalent with the introduction of an elementary length into the theory and, therefore, with the principal impossibility of carrying out experiments arbitrarily close to each other in space-time. From this point of view we should expect that only integral conservation laws exist.

There is, however, another disadvantage of the quantities $Q'(\sigma)$, $P'_\mu(\sigma)$, $M'_{\mu\nu}(\sigma)$ connected with the correspondence principle. For physical reasons the local theory should result as a limiting case from the corresponding non-local theory. It may be shown easily by a detailed discussion of the limiting process that this is not the case with the quantities $Q'(\sigma)$, $P'_\mu(\sigma)$, $M'_{\mu\nu}(\sigma)$. We shall carry out this discussion for the example of section 4 since a general argumentation is rather cumbersome.

3. - Differential conservation laws.

Consider the divergences of the quantities j_ν , $T_{\nu\mu}$, $M_{\lambda\nu\mu}$ defined by (2.5-7) and (1.15). We have for j_ν

$$(3.1) \quad \partial_\nu j_\nu = -ie\eta^\alpha \sum_{i=0}^{s-1} [\partial_\nu p_{\nu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha + p_{\nu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha q_{\nu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha].$$

Using now the Lagrange equations (1.7) and the identities (1.5,6) we get

$$(3.2) \quad \partial_\nu j_\nu = -ie\eta^\alpha \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \sum_{i=1}^{s-1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} - p_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha \right] q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha + \sum_{i=1}^s p_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha \right\} = \\ = -ie\eta^\alpha \sum_{i=0}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha.$$

Analogously we obtain for $T_{\nu\mu}$ and $M_{\lambda\nu\mu}$ on account of the Lagrange equations and the identities

$$(3.3) \quad \partial_\nu T_{\nu\mu} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha + \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \right)_{\text{in}} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} [\partial_\nu p_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha q_{\mu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha - p_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha q_{\nu\mu\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha] - \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \right)_{\text{in}},$$

$$(3.4) \quad \partial_\lambda M_{\lambda\nu\mu} = \partial_\lambda (x_\nu T_{\lambda\mu} - x_\mu T_{\lambda\nu}) = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + x_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \right)_{\text{in}} - x_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial x^\nu} \right)_{\text{in}},$$

where $(\partial L / \partial x_\mu)_{\text{in}}$ denotes the derivative of the Lagrange functional L with respect to the variable x_μ occurring independently in L (not by means of the fields $q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha(x)$).

In the case of a gauge invariant theory the sources of the vector j_ν are due to the non-local character of the theory. Indeed, for a local theory $L = L^1$ and we have (cf. 2.2)

$$(3.5) \quad -ie\eta^\alpha \sum_{i=0}^s \frac{\partial L^1}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^s \frac{\partial L^1}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} \delta q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \delta L^1 = 0,$$

the last equation resulting from the invariance of L^1 with respect to the transformation (2.2). In the charge balance we must, therefore, take the right hand side of equation (3.2) into account as due to the internal constituents of the system.

In general, in a non-local theory which is not invariant with respect to gauge transformations, we shall have to divide the right hand side of (3.2) in two parts. One of them, due to the lack of invariance, describes exchange of charge with external systems, the other, due to the non-local character of the theory, belongs to the system itself.

A similar situation presents itself in the case of momentum (cf. 3.3). The right hand side vanishes in a local theory invariant with respect to translations. In the general case of a non-local theory we shall again divide the sources of $T_{\nu\mu}$ into a part due to the lack of invariance with respect to translations, describing momentum exchange with external systems and an internal part,

due to the non-local character of the theory. The first will be given by the derivative of L with respect to the x_μ occuring independently but not invariantly, the second by the derivative with respect to the x_μ occuring independently and invariantly.

An analogous division into an internal and external part may be carried out for the right hand side of equation (3.4) from the point of view of the transformation character with respect to rotations.

Since we are not interested in interactions with external fields (the introduction of non-localities with respect to given external fields brings in nothing essentially new into the theory) we shall confine ourselves to the consideration of the case where the right hand sides of equations (3.2-4) are due to the non-local character of the theory. As belonging to the system, they must be taken into account in the balance of the corresponding tensor densities j_ν , $T_{\nu\mu}$ or $M_{\lambda\nu\mu}$ resp. This brings us immediately to the differential conservation laws.

Integration of equations (3.2-4) over space-time between the boundary surface σ_1 and a surface σ inside the region (σ_1, σ_2) yields

$$(3.6) \quad Q'(\sigma) - Q'(\sigma_1) + ie\eta^\alpha \int_{\sigma_1}^{\sigma} \sum_{i=0}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha dx = 0,$$

$$(3.7) \quad P'_\mu(\sigma) - P'_\mu(\sigma_1) - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx = 0,$$

$$(3.8) \quad M'_{\nu\mu}(\sigma) - M'_{\nu\mu}(\sigma_1) - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left\{ T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + x_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} - x_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu} \right)_{\text{in}} \right\} dx = 0.$$

These equations show that the tensors

$$(3.9) \quad Q(\sigma) = Q'(\sigma) + ie\eta^\alpha \int_{\sigma_1}^{\sigma} \sum_{i=0}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha} q_{\nu_1 \dots \nu_i}^\alpha dx + e,$$

$$(3.10) \quad P_\mu(\sigma) = P'_\mu(\sigma) - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx + e_\mu,$$

$$(3.11) \quad M_{\nu\mu}(\sigma) = M'_{\nu\mu}(\sigma) - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left\{ T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + x_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} - x_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu} \right)_{\text{in}} \right\} dx + e_{\nu\mu},$$

do not depend on σ and satisfy, therefore, the differential conservation laws

$$(3.12) \quad \frac{\delta Q(\sigma)}{\delta \sigma} = 0, \quad \frac{\delta P_\mu(\sigma)}{\delta \sigma} = 0, \quad \frac{\delta M_{\nu\mu}(\sigma)}{\delta \sigma} = 0,$$

c , c_μ , $c_{\nu\mu}$ are arbitrary quantities independent on σ which may be always added in the definitions (3.9-11) without influence on the conservation laws (3.12). The symbol $\delta/\delta\sigma$ denotes the variational derivative.

It may be noted, that integration of (3.2-4) between σ and σ_z would result in the same conservation laws (3.12) on account of equations (3.15).

The quantities $Q(\sigma)$, $P_\mu(\sigma)$, $M_{\nu\mu}(\sigma)$ may with right be regarded as the total charge, momentum and angular momentum of the system since they are free of the disadvantages of the quantities $Q'(\sigma)$, $P'_\mu(\sigma)$, $M'_{\nu\mu}(\sigma)$. First of all they satisfy differential conservation laws, second, it is always possible by an appropriate choice of c , c_μ , $c_{\nu\mu}$ to satisfy the correspondence principle.

The differential conservation laws must, of course, be consistent with the integral conservation laws (2.7) of the preceding section. For the charge $Q(\sigma)$ and the momentum $P_\mu(\sigma)$ this is easily checked, for the angular momentum it means an additional condition on the tensor $T_{\nu\mu}$. Indeed, on σ_1 we have from (3.9-11)

$$(3.13) \quad Q(\sigma_1) = Q'(\sigma_1) + c, \quad P_\mu(\sigma_1) = P'_\mu(\sigma_1) + c_\mu, \quad M_{\nu\mu}(\sigma_1) = M'_{\nu\mu}(\sigma_1) + c_{\nu\mu}.$$

For consistency the same relations must hold on σ_2

$$(3.14) \quad Q(\sigma_2) = Q'(\sigma_2) + c, \quad P_\mu(\sigma_2) = P'_\mu(\sigma_2) + c_\mu, \quad M_{\nu\mu}(\sigma_2) = M'_{\nu\mu}(\sigma_2) + c_{\nu\mu},$$

since in this case from the constancy of $Q(\sigma)$, $P_\mu(\sigma)$, $M_{\nu\mu}(\sigma)$ there follow the equations (2.7) expressing the integral conservation laws for $Q'(\sigma)$, $P'_\mu(\sigma)$ and $M'_{\nu\mu}(\sigma)$.

To show that relations (3.14) are in fact satisfied, it is sufficient to prove the vanishing of the following integrals (cf. 3.9-11)

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{aligned} & -ie\eta^\alpha \sum_{i=0}^s \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial L}{\partial q_{v_1 \dots v_i}^\alpha} q_{v_1 \dots v_i}^\alpha dx = 0, & \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx = 0, \\ & \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + x_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} - x_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu} \right)_{\text{in}} \right\} dx = 0. \end{aligned} \right.$$

This is easily done if one considers the invariance properties of the integrals.

We shall carry out the proof for the simple case $W = W^1 + W^2$. The same argumentation holds also in the general case $W = \sum_n W^n$.

To express invariance with respect to translations and rotations we may write the Lagrange functional L corresponding to $W = W^1 + W^2$ in the form (cf. 1.3)

$$(3.16) \quad L = L^1[q^\alpha(x), q^\alpha_\nu(x), \dots, q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}(x)] + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx^1 \{ L^2[(x_\mu - x_\mu^1)^2, q^\alpha(x), q^\alpha(x^1), \dots] + \\ + L^2[(x_\mu^1 - x_\mu)^2, q^\alpha(x^1), q^\alpha(x), \dots] \}.$$

According to (2.2) and (3.16) we may write the left hand side of the first of equations (3.15) in the form

$$(3.17) \quad \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^s \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial L^1}{\partial q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}} \delta q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i} dx + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \frac{\partial L^2[(x_\mu - x_\mu^1)^2, \dots]}{\partial q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}(x)} \delta q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial L^2[(x_\mu^1 - x_\mu)^2, \dots]}{\partial q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}(x)} \delta q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}(x) \right\} dx dx^1 \right].$$

Change of integration variables in the last term of the second integral yields

$$(3.18) \quad -ie\eta^\alpha \sum_{i=0}^s \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i}} q^\alpha_{\nu_1 \dots \nu_i} dx = \frac{1}{\varepsilon} \delta W,$$

where δW is the variation of W due to the gauge transformation (2.2) and vanishes on account of the assumed invariance of W .

A similar argumentation holds for the second equation (3.15). Since L^1 does not contain x independently the only contribution to the left hand side of this equation comes from L^2

$$(3.19) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \left(\frac{\partial L^2[(x_\mu - x_\mu^1)^2, \dots]}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} + \left(\frac{\partial L^2[(x_\mu^1 - x_\mu)^2, \dots]}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} \right\} dx dx^1.$$

Changing the variables in the second integral and taking into account that $(\partial/\partial x_\mu)_{\text{in}} = (-\partial/\partial x_\mu^1)_{\text{in}}$ if the differentiation concerns a function of $x_\mu - x_\mu^1$, we get the result

$$(3.20) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx = 0,$$

for theories invariant with respect to translations.

The situation is somewhat different for the last equation (3.15). Here the term

$$(3.21) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ x_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} - x_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu} \right)_{\text{in}} \right\} dx,$$

vanishes separately for a theory invariant with respect to rotations, as may be shown by a similar argument as (3.20). There remains

$$(3.22) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}) dx = 0.$$

This equation may not be derived from the explicit form of L but must be taken as a condition on the tensor $T_{\nu\mu}$, following from the consistence between the differential and the integral conservation laws. This condition replaces in a non-local theory the symmetry condition $T_{\nu\mu} = T_{\mu\nu}$ of the local theory and is less stringent than the last one.

4. - Example.

The general considerations of sections 1-3 are applicable to any non-local theory which is derivable from a basic functional (0.1). We shall illustrate them taking as example the original version of an invariant non-local theory as given by PEIERLS and MACMANUS (1948). Although this theory is not complete from the point of view of quantum theory (cf. RZEWUSKI, 1951) it may serve very well to exhibit all interesting aspects of an investigation concerned with conservation laws.

We take for simplicity the case of two scalar fields, one real φ and one complex ψ , ψ^* (PEIERLS and MACMANUS considered originally charged particles interacting by means of the electromagnetic field), interacting non-locally with each other. The basic functional is then

$$(4.1) \quad W = W^1 + W^2 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \psi_\nu^* \psi_\nu + \kappa^2 \psi^* \psi + \frac{1}{2} \varphi_\nu^2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^2 \right\} dx^1 + \\ + g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int \varphi(x^1) F(x^1, x^2) \psi^*(x^2) \psi(x^2) dx^1 dx^2.$$

The first part W^1 describes «free» fields, the second W^2 the non-local interaction. The function $F(x^1, x^2)$ determines the character of this interaction. For correspondence, the interaction term in (4.1) must go over into the conventional term

$$(4.2) \quad g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi \psi^* \psi dx,$$

of the corresponding local theory. The transition to the local theory is, therefore, described by the limiting process

$$(4.3) \quad F(x^1, x^2) \rightarrow \delta(x^1 - x^2).$$

To have invariance with respect to translations and rotations we must demand that F depends on x^1 and x^2 by means of the invariant $(x_\mu^1 - x_\mu^2)^2$

$$(4.4) \quad F(x^1, x^2) = F[(x_\mu^1 - x_\mu^2)^2].$$

It is convenient to introduce the notation

$$(4.5) \quad \psi^*(x)\psi(x) = \varrho(x), \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx^1 \varphi(x^1) F(x^1, x^2) = \tilde{\varphi}(x^2), \quad \tilde{\varrho}(x^1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} F(x^1, x^2) \varrho(x^2) dx^2.$$

The Lagrange functional becomes according to (1.3)

$$(4.6) \quad L = \psi_v^* \psi_v + \kappa^2 \psi^* \psi + \frac{1}{2} \varphi_v^2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^2 + g(\varphi \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho).$$

The generalized momenta corresponding to the fields ψ , ψ^* , φ are (cf. 1.4)

$$(4.7) \quad p_v^\psi = \psi_v^*, \quad p_v^{\psi^*} = \psi_v, \quad p_v^\varphi = \varphi_v,$$

so that the Euler-Lagrange equations (1.7) become (cf. 4.6)

$$(4.8) \quad (\square - \kappa^2)\psi = g\tilde{\varphi}\psi, \quad (\square - \kappa^2)\psi^* = g\tilde{\varphi}\psi^*, \quad (\square - \lambda^2)\varphi = g\tilde{\varrho}.$$

Since φ , ψ , ψ^* are scalar fields the transformation formulae (1.10) simplify to

$$(4.9) \quad \delta\psi = \delta_0\psi + \psi_v \delta x_v, \quad \delta\psi^* = \delta_0\psi^* + \psi_v^* \delta x_v, \quad \delta\varphi = \delta_0\varphi + \varphi_v \delta x_v,$$

showing that the corresponding tensors $S_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ and $f_{[v\delta]e}$ vanish (cf. 1.10, 13). The functional (1.14, 15) becomes, therefore,

$$(4.10) \quad F(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} \{T_{\nu\mu} \delta x_{\mu} + \psi_{\nu}^* \delta \psi + \psi_{\nu} \delta \psi^* + \varphi_{\nu} \delta \varphi\},$$

with

$$(4.11) \quad T_{\nu\mu} = T_{\nu\mu}^1 + T_{\nu\mu}^2, \quad (T_{\nu\mu} = T_{\mu\nu}),$$

where

$$(4.12) \quad T_{\nu\mu}^1 = \delta_{\nu\mu} \left\{ \psi_{\lambda}^* \psi_{\lambda} + \kappa^2 \psi^* \psi + \frac{1}{2} \varphi_{\lambda}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^2 \right\} - \psi_{\nu}^* \psi_{\mu} - \psi_{\nu} \psi_{\mu}^* - \varphi_{\nu} \varphi_{\mu},$$

corresponding to W^1 , is the local part of the tensor $T_{\nu\mu}$ describing the free fields and

$$(4.13) \quad T_{\nu\mu}^2 = \delta_{\nu\mu} g(\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi),$$

is the non-local part corresponding to W^2 which describes interaction of the fields.

The tensor $M_{\lambda\nu\mu}$ (cf. 2.7) is given by

$$(4.14) \quad M_{\lambda\nu\mu} = x_{\nu} T_{\lambda\mu} - x_{\mu} T_{\lambda\nu}$$

and the tensor j_{μ} (cf. 2.5) by

$$(4.15) \quad j_{\mu} = -ie \{ \psi_{\mu}^* \psi - \psi_{\mu} \psi^* \}.$$

We have, therefore, the integral conservation laws (2.7) with

$$(4.16) \quad \begin{cases} Q'(\sigma) = -ie \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \{ \psi_{\mu}^* \psi - \psi_{\mu} \psi^* \}, \\ P'_{\mu}(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} T_{\nu\mu}^1 + g \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} (\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi), \quad M'_{\nu\mu}(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\lambda} M_{\lambda\nu\mu}. \end{cases}$$

The quantity Q' has already the form of the total charge in the corresponding local theory and satisfies, therefore, the correspondence principle. This is due to the fact that the non-local interaction term does not contain derivatives of the fields.

The other quantities P'_{μ} , $M'_{\nu\mu}$ do not correspond with the local theory.

Indeed in the limiting case (4.3) we have $\tilde{\varrho} \rightarrow \varrho$, $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi$ so that e.g.

$$(4.17) \quad P'_\mu(\sigma) \rightarrow \int_\sigma d\sigma_\nu T^1_{\nu\mu} + 2g \int_\sigma d\sigma_\mu \varphi \varrho.$$

This quantity differs from the local momentum

$$(4.18) \quad \int_\sigma d\sigma_\nu T^1_{\nu\mu} + g \int_\sigma d\sigma_\mu \varphi \varrho,$$

by a factor 2 in the interaction term. A similar situation presents itself for the quantity $M'_{\nu\mu}(\sigma)$.

To obtain differential conservation laws one has to construct the charge (3.9), momentum (3.10) and angular momentum (3.11) of section 3.

$$(4.19) \quad Q(\sigma) = -ie \int_\sigma d\sigma_\mu (\psi_\mu^* \psi - \psi_\mu \psi^*) + e,$$

$$(4.20) \quad P_\mu(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\nu T^1_{\nu\mu} + g \int_\sigma d\sigma_\mu (\varphi \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho) - \int_{\sigma_1}^\sigma dx (\varphi \tilde{\varrho}_\mu + \tilde{\varphi}_\mu \varrho) + e_\mu = \\ = \int_\sigma d\sigma_\nu T^1_{\nu\mu} + g \int_{\sigma_1}^\sigma dx (\varphi_\mu \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho_\mu) + g \int_{\sigma_1}^\sigma d\sigma_\mu (\varphi \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho) + e_\mu,$$

$$(4.21) \quad M_{\nu\mu}(\sigma) = M^1_{\nu\mu}(\sigma) + g \int_\sigma d\sigma_\lambda (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho) - \\ - g \int_{\sigma_1}^\sigma dx (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi \tilde{\varrho}_\lambda + \tilde{\varphi}_\lambda \varrho) + e_{\nu\mu} = \\ = M^1_{\nu\mu}(\sigma) + g \int_{\sigma_1}^\sigma dx (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi_\lambda \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho_\lambda) + \\ + g \int_{\sigma_1}^\sigma d\sigma_\lambda (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi \tilde{\varrho} + \tilde{\varphi} \varrho) + e_{\nu\mu}.$$

where

$$M^1_{\nu\mu}(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\lambda (x_\nu T^1_{\lambda\mu} - x_\mu T^1_{\lambda\nu}).$$

In the derivation of the second of the formulae (4.20) the surface integrals $(\int_\sigma - \int_{\sigma_1}) d\sigma_\mu$ have been replaced by volume integrals. This may be done on the assumption either that the surfaces σ_1 and σ_2 form together a closed surface, or that they are connected in infinity by a time-like surface giving no contribution to the surface integral. The last assumption means vanishing of

the corresponding quantities at points infinitely remote in space-like directions. The same argumentation has been used by derivation of the second of the formulae (4.21).

It follows from the general considerations of section 3 and may be easily checked by a direct calculation, that the quantities (4.19-21) satisfy differential conservation laws of the form (3.12) if the fields φ , ψ , ψ^* obey the Euler-Lagrange field equations.

To establish correspondence with the local theory one has to make the following choice for the quantities c , c_μ , $c_{\nu\mu}$:

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 0, \quad c_\mu = -\frac{1}{2}g \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu (\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi), \\ c_{\nu\mu} = -\frac{1}{2}g \int_{\sigma_1} d\sigma_\lambda (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi), \end{array} \right.$$

so that the charge, momentum and angular momentum become finally

$$(4.23) \quad Q(\sigma) = -ie \int_\sigma d\sigma_\mu (\psi_\mu^* \psi - \psi_\mu \psi^*) = Q'(\sigma),$$

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_\mu(\sigma) = P_\mu^1(\sigma) + g \int_{\sigma_1}^\sigma dx (\varphi_\mu \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi_\mu) + \frac{1}{2}g \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu (\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi), \\ P_\mu^1 = \int_\sigma d\sigma_\nu T_{\nu\mu}, \end{array} \right.$$

$$(4.25) \quad M_{\nu\mu}(\sigma) = M_{\nu\mu}^1(\sigma) + g \int_{\sigma_1}^\sigma dx (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi_\lambda \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi_\lambda) + \\ + \frac{1}{2}g \int_{\sigma_1} d\sigma_\lambda (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) (\varphi \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \varphi).$$

It is easily seen, that in the limiting case $F(x^1, x^2) \rightarrow \delta(x^1 - x^2)$, $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi$, $\tilde{\psi} \rightarrow \psi$ the quantities (4.23-25) go over into the corresponding local quantities

$$(4.26) \quad Q(\sigma) \rightarrow -ie \int_\sigma d\sigma_\mu (\psi_\mu^* \psi - \psi_\mu \psi^*),$$

$$(4.27) \quad P_\mu(\sigma) \rightarrow P_\mu^1(\sigma) + \int_\sigma d\sigma_\mu \varphi \varphi,$$

$$(4.28) \quad M_{\nu\mu}(\sigma) \rightarrow M_{\nu\mu}^1(\sigma) + g \int_\sigma d\sigma_\lambda (x_\nu \delta_{\lambda\mu} - x_\mu \delta_{\lambda\nu}) \varphi \varphi.$$

Note added in proof.

In the meantime I had the possibility to read the manuscript of Professor W. PAULI's paper *On the Hamiltonian Structure of Non-local Field Theories* (*Nuovo Cimento*, **10**, 653 (1953)), in which differential conservation laws are derived for the particular case of the Kristensen Möller theory. It seems worth while to clarify their connection with my own general conservation laws.

Taking the average of formula (3.10) of this paper (or formula (17) of my note in *Nuovo Cimento*, **10**, 182 (1953)) and the equivalent formula resulting from the integration of (3.3) between σ and σ_2 one obtains

$$P_\mu(\sigma) = P'_\mu(\sigma) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2} \varepsilon(\sigma, \sigma') \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{\text{in}} dx' + c_\mu,$$

where

$$\varepsilon(\sigma, \sigma') = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \text{ is « later » then } \sigma' \\ -1 & \text{if } \sigma \text{ is « earlier » then } \sigma' \end{cases}$$

For the particular case of the Kristensen Möller theory and for a hypersurface σ given by the equation $x_0 = \text{const.}$, this formula becomes

$$P_\mu(x_0) = P_\mu^1(x_0) + g \int \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2} \varepsilon(x_0 - x_0^1) \{ F(x^1, x^2, x^3) \bar{\psi}_\mu(x^1) u(x^2) \psi(x^3) + \\ + F(x^2, x^1, x^3) \bar{\psi}(x^2) u_\mu(x^1) \psi(x^3) + F(x^2, x^3, x^1) \bar{\psi}(x^2) u(x^3) \psi_\mu(x^1) \} dx^1 dx^2 dx^3,$$

where P_μ^1 is the local part of the momentum, corresponding to the « free » fields.

This is already equivalent to Professor PAULI's result. His final form (formula (8) of the manuscript) may be obtained if one wishes to eliminate $u_\mu(x^1)$. This is easily done by means of partial integrations using the fact that $F(x^1, x^2, x^3)$ is invariant with respect to translations.

The same connection exists, of course, also for the charge and for the angular momentum.

I am indebted to Professor PAULI for an interesting correspondence on non-local theories.

REFERENCES

- (¹) E. NOETHER: *Gött. Nachr., Math.-Phys. Klasse*, p. 235 (1918).
- (²) R. E. PEIERLS and H. MACMANUS: *Proc. Roy. Soc., A* **195**, 323 (1948).
- (³) J. RZEWUSKI: *Acta Phys. Pol.*, **11**, 9 (1951).
- (⁴) J. RZEWUSKI: *Acta Phys. Pol.* (in publication 1952-53).

RIASSUNTO (*)

Si esamina fino a che punto le leggi di conservazione sono soddisfatte nelle teorie dei campi non locali. In primo luogo si dimostra che dall'invarianza dell'integrale d'azione rispetto alla trasformazione di gauge di prima specie, alle traslazioni e alle rotazioni dello spazio-tempo seguono le leggi integrali di conservazione. Queste leggi integrali esprimono che determinati funzionali della superficie spaziale σ hanno valori uguali ai confini σ_1 e σ_2 del dominio di spazio-tempo considerato nel problema. Questi funzionali presentano lo svantaggio di non essere costanti nella regione fra σ_1 e σ_2 . Un altro svantaggio consiste nel fatto che non corrispondono con la carica, l'impulso e il momento angolare locali. Si dimostra, inoltre, che, partendo dalle equazioni del campo di Euler-Lagrange, è possibile costruire altri funzionali di σ che restano costanti in tutta la regione (σ_1, σ_2) e contemporaneamente soddisfanno il principio di corrispondenza. Questi funzionali possono, pertanto, essere interpretati come carica, impulso e momento angolare totali del sistema non locale. Le leggi integrali di conservazione seguono dalle leggi differenziali se la condizione di invarianza rispetto ai tre tipi di trasformazione suddetti è soddisfatta. Le considerazioni generali che si fanno sono illustrate con un semplice esempio di una teoria di campo non locale.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

On the Longitudinal Development of Air Showers According to Fermi's Theory of Meson Production.

E. AMALDI, L. MEZZETTI and G. STOPPINI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 7 Aprile 1953)

Summary. — The longitudinal development of an air shower produced by a primary proton of 10^{14} eV has been calculated numerically, with the method of successive collisions, under the assumption that in the collision between two particles the production of pions and nucleons follows the thermodynamic approximation of Fermi's theory. In the high energy region ($W \geq 5000$ GeV) there is production of π^\pm and π^0 mesons as well as pairs of nucleons, while in the low energy region only π^\pm and π^0 are produced. In the low energy region the calculations have been done under two different assumption: in case *A* the collision is totally anelastic while in case *E*, the energy available in the center of gravity frame of reference is divided equally among the produced mesons and the nucleons taking part in the collision. The development of the various components throughout the atmosphere is given graphically. While the ratio of the penetrating component to the electronic component turns out to be of the right order of magnitude in both cases (1 percent in case *A* and 3 percent in case *E*) the penetrating component is too rich in nucleons especially in case *E*.

1. — Introduction.

For a few years it has been recognized that in the development of Auger showers through the atmosphere, the nucleonic and mesonic cascades play the main role while the soft component is produced in secondary processes such as the decay of π^0 , μ , ... - mesons and the electromagnetic collisions of the penetrating component.

To our knowledge however, no quantitative calculation of the various components of the showers has been undertaken until now following the above

mentioned qualitative scheme. Therefore we think it worthwhile to report here the results of a few very rough calculations of the longitudinal development of Auger showers, based on the thermodynamic approximation of Fermi's theory ⁽¹⁾.

Among the various theories proposed until now we have chosen that of Fermi mainly for its simplicity and capacity to be extended, without introducing special assumptions, to the case of meson-nucleon collision, or to the

case (not considered here) of production of other particles different from pions and nucleons, such as V, K, κ , ... particles which could play an important role in the development of a shower.

Furthermore a few experimental results on very high energy collisions ⁽²⁾, appear to be in satisfactory agreement with Fermi's theory.

On the other hand the problem of the calculation of the lateral spread of extensive showers in terms of Fermi's angular distribution, has not yet received a definitive answer: some

authors ⁽³⁾ consider this point a decisive disproof of Fermi's theory, while others ⁽⁴⁾ think that better calculations, taking for instance into account the fluctuations, could reduce the discrepancy between theory and experiments.

In the present paper we do not intend to discuss all these problems as well as the well known theoretical difficulties connected with the establishing and freezing of the statistical equilibrium inside the collision volume. We simply use Fermi's theory as a very convenient working assumption and present the corresponding results.

In order to avoid the use of non elementary methods which would not appear justified for the treatment of a problem still rather unknown also in its qualitative fundamental aspects, we have performed the calculations using

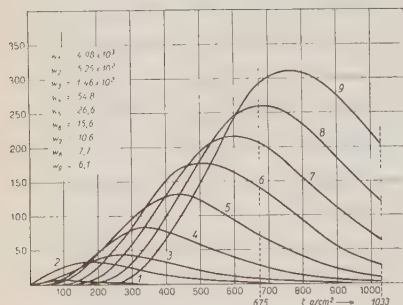


Fig. 1. — Number of nucleons of the various generations as a function of depth t (case E).

⁽¹⁾ E. FERMI: *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950); *Phys. Rev.*, **81**, 683 (1951).

⁽²⁾ J. J. LORD, J. FAIBERG and M. SCHEIN: *Phys. Rev.*, **80**, 970 (1950); D. LAL, Y. PAL, B. PETERS and M. S. SWAMI: *Phys. Rev.*, **87**, 545 (1952); *Proc. Ind. Acc. Sc.*, **A 36**, 75 (1952); M. F. KAPLON and D. M. RITSON: *Phys. Rev.*, **88**, 386 (1952).

⁽³⁾ H. S. GREEN and H. MESSEL: *Proc. Phys. Soc.*, **A 64**, 1083 (1951); H. MESSEL and H. S. GREEN: *Phys. Rev.*, **87**, 378 (1952).

⁽⁴⁾ W. E. HASEN, R. E. HEINEMAN and E. S. LENNOZ: *Phys. Rev.*, **86**, 198 (1952).

the three following approximations with respect to the thermodynamic form of Fermi's theory:

1) We have substituted for the continuum energy spectrum of the particles produced (in the center of gravity frame: C-system) a sharp line of energy equal to the mean energy.

2) We assume half of the particles produced to be emitted exactly in the forward and one half exactly in the backward direction in the C-system.

3) We assume that above 5000 GeV in the laboratory frame of reference (high energy region) π^\pm and π^0 as well as nucleons are produced, while below this energy (low energy region) only pions are produced ⁽¹⁾.

Furthermore we have added the two following assumptions:

a) the nucleon-nucleon cross-section is constant (i.e. does not depend on the energy) and is given by the expression

$$(1) \quad \sigma = \pi R^2,$$

where

$$(2) \quad R = \xi \frac{\hbar}{m_\pi c},$$

is the radius of the equilibrium volume $\Omega_0 = (4/3)\pi R^3$ of Fermi's theory. ξ is a number of the order of unity that can be adjusted in order to obtain the empirical value of the mean free path of the penetrating particles in air. One could, of course take a cross-section σ independent of the equilibrium volume Ω_0 : but such a procedure does not correspond to the spirit of Fermi's theory and furthermore, would introduce an extra adjustable parameter making still less significant the comparison with the experimental data.

b) We assume that σ and Ω_0 have the same value for the nucleon-nucleon as for the pion-nucleon collisions.

One can easily calculate, under the above assumptions, the average number of particles produced by a nucleon or a meson colliding with an air nucleus (section 2). Then the development of the shower through the atmosphere is

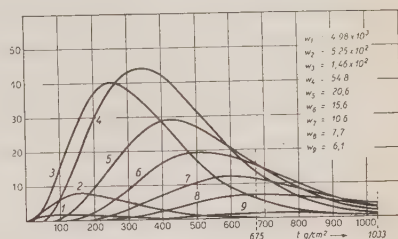


Fig. 2. - Number of pions of the various generations as a function of depth t (case E).

obtained by applying the elementary method of successive collisions (section 3) which is interrupted at such an energy that the average number of pions produced in a collision with an air nucleus, is about 0.4.

The numerical calculations have been done for a primary proton of $10^5 \text{ Mc}^2 = 0.94 \cdot 10^{14} \text{ eV}$, and 2 different assumptions about the anelasticity of the collision in the low energy region (table I). The results are given as graphs and are discussed in section 4.

TABLE I. — Numerical data for the two calculated showers.

A_p	ξ	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	α		N_1	N_2
							$W > 5 \cdot 10^3 \text{ GeV}$	$W < 5 \cdot 10^3 \text{ GeV}$		
86 g/cm ²	0.74	0.30	0.32	0.22	0.11	0.05	1.32	1.32 ÷ 0.95(A) 1.32 ÷ 0.70(E)	1.84	2.84

During the last few years a very elaborated mathematical theory of extensive showers has been developed ⁽⁵⁾, which, in the future, will probably replace most of the preceding calculations.

Such a theory, however, is based on quite different assumptions about the process of production of penetrating particles and furthermore, until now has not been brought to numerical results. Therefore we think it worthwhile to publish our results in spite of their very elementary and rough character which, perhaps, appear to be more in proportion to the available experimental information on the qualitative structure of the Auger showers.

2. — The nucleon-nucleus collision.

In order to calculate the collision of a nucleon (or a meson) with a nucleus of air ($R_A = 1.4 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$; for air $R_a = 3.43 \cdot 10^{-13}$) we introduce the probability $P_i(q)$ that a particle, which crosses a nucleus, undergoes i collisions against nucleons:

$$(3) \quad P_i = \frac{2}{q^2} \frac{1}{i!} \{ (i+1)! - e^{-q} [q^{i+1} + (i+1)q^i + (i+1)i q^{i-1} + \dots + (i+1)!] \},$$

$$q = \frac{2R_a}{\lambda}.$$

⁽⁵⁾ H. MESSEL, R. B. POTTS and C. B. A. MCCUSKER: *Phil. Mag.*, **43**, 889 (1952); B. A. CHARTRES and H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **87**, 748 (1952); H. MESSEL and R. B. POTTS: *Phys. Rev.*, **87**, 759 (1952); **88**, 488 (1952).

By expressing the mean free path in nuclear matter by means of the cross-section (1) and the density of nuclear matter, the probabilities P_i are expressed as functions of the parameter ξ . On the other hand, if we call Λ_σ and Λ_p the mean free path in air of the considered particle corresponding respectively to the geometric cross-section ($\Lambda_\sigma = 60 \text{ g/cm}^2$) and to collision with production of penetrating secondaries, one has obviously

$$(4) \quad \frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_p} = 1 - P_0,$$

which allows P_0 to be determined and therefore ξ and all the other P_i , once we have chosen the value of Λ_p . The numerical calculations reported in section 4 have been done for Λ_p equal, within the experimental error, to the experimental result for production of penetrating showers in air. The probabilities of 5 or more collisions have

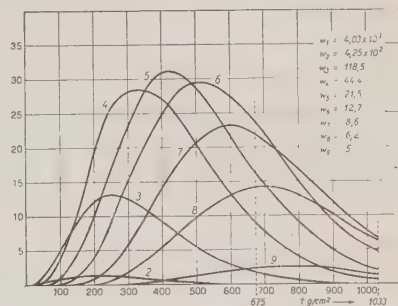


Fig. 3. — Number of muons of the various generations as a function of depth t (case E).

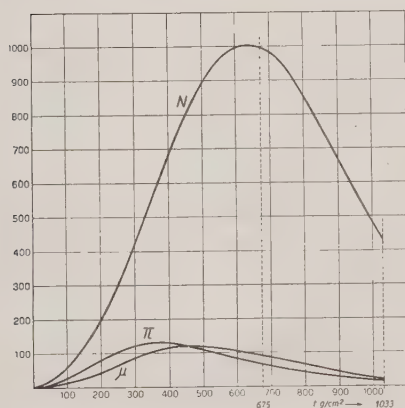


Fig. 4. — Total number of particles of all generations as a function of depth t . N — nucleons, π — pions, μ — muons (case E).

The same argument can be repeated

for the experimental result for production of penetrating showers in air. The probabilities of 5 or more collisions have been put equal to zero as it is suggested by the considerations of the very low number of nucleons present in an air nucleus: the value of P_i has been correspondingly slightly increased.

Let us now consider an incident particle of very high energy which, crossing a nucleus, undergoes i collisions. One can easily show that for the energies involved in our calculations the N nucleons and the M pions produced in the first collision travel through the nuclear matter all at such a small angle and with such a high energy that it is reasonable to think they behave as a composite particle and therefore contribute all together to the second collision (⁶). for the third and fourth collision.

(⁶) U. HABER-SHAIM: *Phys. Rev.*, **84**, 1199 (1951).

By applying the conservation of energy and momentum to the successive collisions of the composite particle against nucleons one finds the following relation

$$(5) \quad w_0^{(i)} = \left\{ 2wi + (i-1)^2 - \left[1 - \left(\frac{m}{\bar{M}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2},$$

where w is the energy (expressed in units of Mc^2) in the laboratory frame of reference, of the incident particle plus a nucleon at rest, $w_0^{(i)}$ the energy avail-

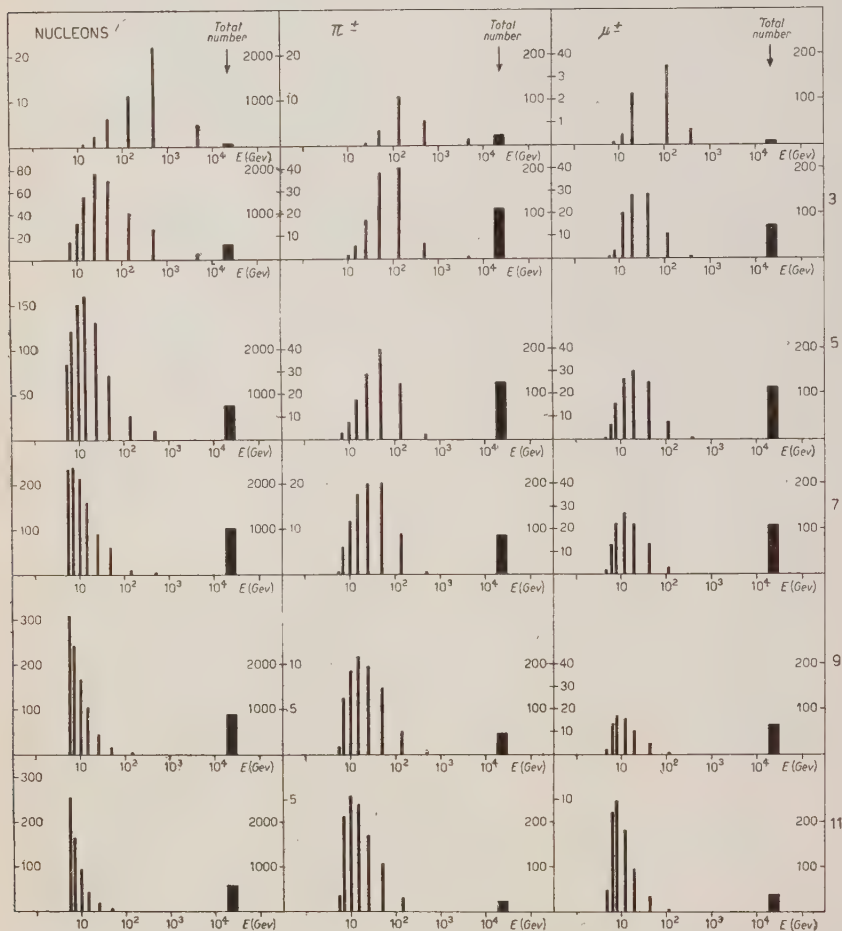


Fig. 5. - Energy spectrum on nucleons, pions and muons at various depths in the atmosphere (case E).

lable in the C-sistem of the i -th collision, M and m are the rest energies respectively of the nucleon and the incident particle.

In the high energy region ($w \geq 5000$) eq. (5) can be approximated to the following relation

$$(9) \quad w_0^{(i)} = w_0 \sqrt{i}, \quad (w_0 = w_0^{(1)})$$

which gives the following equation for the number of particles produced in the i -th collision inside the same nucleus

$$(7) \quad M^{(i)} = \sqrt{i} M \quad N^{(i)} = \sqrt{i} N.$$

Here

$$(8) \quad \begin{cases} M = 0.54 \xi^{3/4} w_0^{1/2} \\ N = 1.26 \xi^{3/4} w_0^{1/2}, \end{cases}$$

are the usual expressions of Fermi's theory for the first collision (nucleon-nucleon collision). Normalizing the probability of i collisions in the form

$$(9) \quad \pi_i = \frac{P_i}{1 - P_0}, \quad 4 \geq i \geq 1,$$

one gets immediately the total number of particles produced on an average in a collision with an air nucleus

$$(10) \quad \begin{cases} M_t = \{ \pi_1 + \sqrt{2}\pi_2 + \sqrt{3}\pi_3 + \sqrt{4}\pi_4 \} M = \alpha M \\ N_t = \{ \pi_1 + \sqrt{2}\pi_2 + \sqrt{3}\pi_3 + \sqrt{4}\pi_4 \} N = \alpha N. \end{cases}$$

In conclusion the average numbers of particles emitted in the forward direction are

$$(11) \quad \begin{cases} M'_t = \frac{\alpha}{2} M, \\ N'_t = \frac{\alpha}{2} N, \end{cases}$$

and the corresponding average energy

$$(12) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2}{\alpha} \varepsilon,$$

where ε is the mean energy of the particles produced in a nucleon-nucleon collision. An equal number of particles is emitted in the backward direction but the corresponding energy is negligible for the production of other particles.

Let us now consider the low energy region ($w \leq 5000$ GeV). Here equation (6) is too rough an approximation and we will use

$$(13) \quad w_0^{(i)} = \sqrt{2wi + (i-1)^2}.$$

Furthermore the energy available in the centre of gravity frame of reference, for the production of pions will be

$$(14) \quad w_0^{*(i)} = w_0^{(i)} - (r+i-1)(1 + \varepsilon_0^{(i)}),$$

where $r = 2$ or $r = 1$ according to the nature of the incident particle: nucleon or pion. The term $(r+i-1)(1 + \varepsilon_0^{(i)})$ represents the energy of the recoiling

nucleons whose kinetic energy in the C-system is $\varepsilon_0^{(i)}$. At this point we can distinguish two different cases: in the collision the nucleons remain at rest in the center of gravity system ($\varepsilon_0^{(i)} = 0$, totally anelastic collision; in the following indicated by *A*) or we assume equipartition of the kinetic energy among the pions and the nucleons (in the following indicated by *E*). In this case $\varepsilon_0^{(i)}$ is equal to the energy of the pions produced.

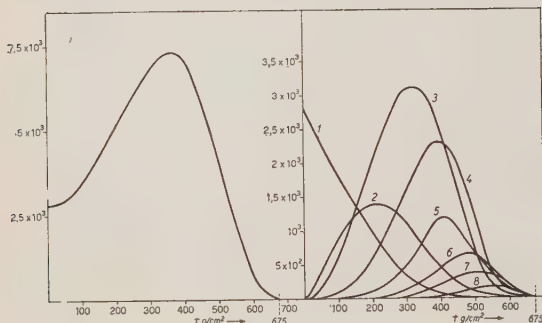


Fig. 6. — *a*) Source of γ rays due to the decay of π^0 of all generations as a function of depth (case *E*). *b*) Source of γ rays, due to π^0 decay of the various generations as a function of depth (case *E*).

Following a procedure similar to that applied in the high energy region we find that the average number of mesons produced in a collision against an air nucleus is given by an expression similar to eq. (10).

$$(14) \quad M_t = \alpha M,$$

where

$$(15) \quad M = 1.34 \xi^{3/4} k_1^{2/3} w_0^{1/2}, \quad k_1 = 1 - r \frac{1 + \varepsilon_0^{(1)}}{w_0},$$

and α is not constant but varies very slightly in the energy region of a few

GeV (table I). The number of particles emitted in the forward direction is given again by the expression

$$(16) \quad M'_t = \frac{\alpha}{2} M,$$

similar to (11). Besides the number of pions produced one has to calculate the number N_r of recoiling nucleons; taking into account the probability (9), one gets the numerical values listed in table I. In case E their kinetic energy is equal to that of the pions i.e.

$$(17) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{w}{\frac{\alpha}{2} M + \frac{N_r}{2}},$$

while in case A they have the energy corresponding to the velocity of the centre of gravity.

3. - The calculation of the shower.

As mentioned in the introduction, the shower has been calculated by the method of successive collisions. Namely we have considered a primary proton of energy E_0 impinging on the atmosphere and moving through it with mean

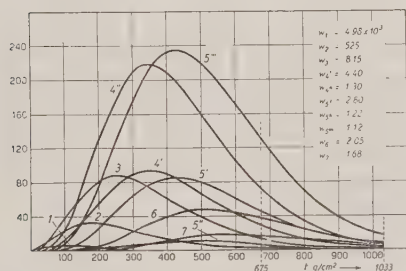


Fig. 7. - Number of nucleons of the first 7 generations as a function of depth t (case A).

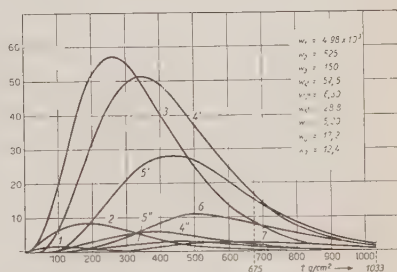


Fig. 8. - Number of pions of the first 7 generations as a function of depth t (case A).

free path Λ_p . In the first collision against an air nucleus, occurring at a depth t_0 (g/cm²), N_1 nucleons and M_1 ($\frac{2}{3} M_1$ charged and $\frac{1}{3} M_1$ neutral) pions are produced. The neutral pions decay immediately in two quanta while all other particles move through the atmosphere with the same mean free path,

until they have at a depth t_1 a collision in which the particles of the second generation (N_2 nucleons and M_2 pions) are generated. As last generation we have taken that which produces about 0.4 pions for collision. From the assumptions exposed in the introduction it is clear that all the nucleons and pions of each generation have the same energy. Therefore at each depth the

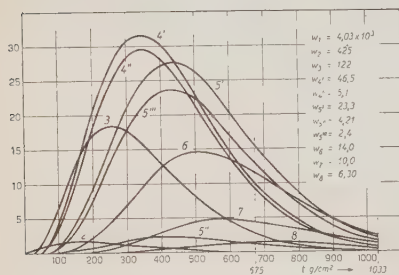


Fig. 9. — Number of muons of the first 8 generations as a function of depth t (case A).

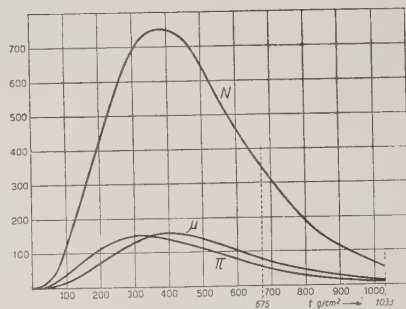


Fig. 10. — Total number of particles of all generations as a function of depth t . N = nucleons, π = pions, μ = muons (case A).

corresponding spectra consist of a number of lines equal to the number of generations considered. The recoiling nucleons, in case A, give rise, in the low energy region to a branching of the spectra.

In order to write such spectra we need to know the probability that a particle of the k -th generation reaches the depth t ; such a probability is determined by two phenomena: the collision against air nuclei, and spontaneous decay. It is quite evident that it is given by the expression

$$\int_0^t \exp[-t_0/\Lambda_p] \frac{dt_0}{\Lambda_p} \int_{t_0}^t \exp[-(t_1-t_0)/\Lambda_p] \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{n_1} dt_1 \int_{t_1}^t \exp[-(t_2-t_1)/\Lambda_p] \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{n_2} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{k-2}}^t \exp[-(t_{k-1}-t_{k-2})/\Lambda_p] \left(\frac{t_{k-2}}{t_{k-1}}\right)^{n_{k-1}} dt_{k-1} \exp[-(t-t_{k-1})/\Lambda_p] \left(\frac{t_{k-1}}{t}\right)^{n_k},$$

where

$$n_s = \frac{Z_0 m_s c^2}{c \tau_s p_s},$$

m_s , τ_s , p_s are the mass, mean life and momentum of the particles of the s -th gene-

ration, Z_0 is the equivalent height of the atmosphere and

$$\left(\frac{t_s}{t_{s+1}}\right)^{n_s},$$

is the usual expression of the probability that a particle, generated at depth t_s , reaches without decay the depth t_{s+1} . By elementary integration one gets

$$(18) \quad \frac{1}{k!} \exp[-t/A_p] \left(\frac{t}{A_p}\right)^k \frac{1}{1+n_1} \cdot \frac{1}{1+n_2/2} \cdots \frac{1}{1+n_k/k},$$

where the separation between the factor due to the collision against the air nuclei

$$(19) \quad p_k(t) = \frac{1}{k!} \exp[-t/A_p] \left(\frac{t}{A_p}\right)^k,$$

and the factor

$$(20) \quad \prod_1^k \frac{1}{1+n_s/s},$$

due to the instability are evident.

Now it is quite evident that the spectrum of the particles of a given type at depth t is given by the expression

$$(21) \quad S_\nu(\varepsilon, t) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) p_0(t) + \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) \mathcal{N}_1 p_1(t) + \delta(\varepsilon - \varepsilon_2) \mathcal{N}_2 p_2(t) + \dots + \delta(\varepsilon - \varepsilon_s) \mathcal{N}_s p_s(t) \quad (\nu = N, \pi, \mu),$$

where \mathcal{N}_s is the total number of particles of the type considered belonging to the s -th generation reaching depth t . Assuming that the only particles produced in a collision are nucleons and pions, in order to take into account the instability of these last we call «effective number» of particles the product

$$(22) \quad m_{\text{eff}, s} = M'_s \frac{2}{3} \frac{1}{1+n_s(\pi)/s}, \quad n_{\text{eff}, s} = N'_s,$$

where M'_s , N'_s are given by (11) or (16) according to the energy ε_s of the s generation. Then \mathcal{N}_s is given by a sum extended to all possible genealogic lines which allow the production of the type of particles considered, in s collisions and each term of the sum is given by the product of the s corresponding effective number (22) of particles.

In order to get the spectrum of muons we notice that the energy of their s -th generation is obtained by multiplying the energy ε_s of the generating pion

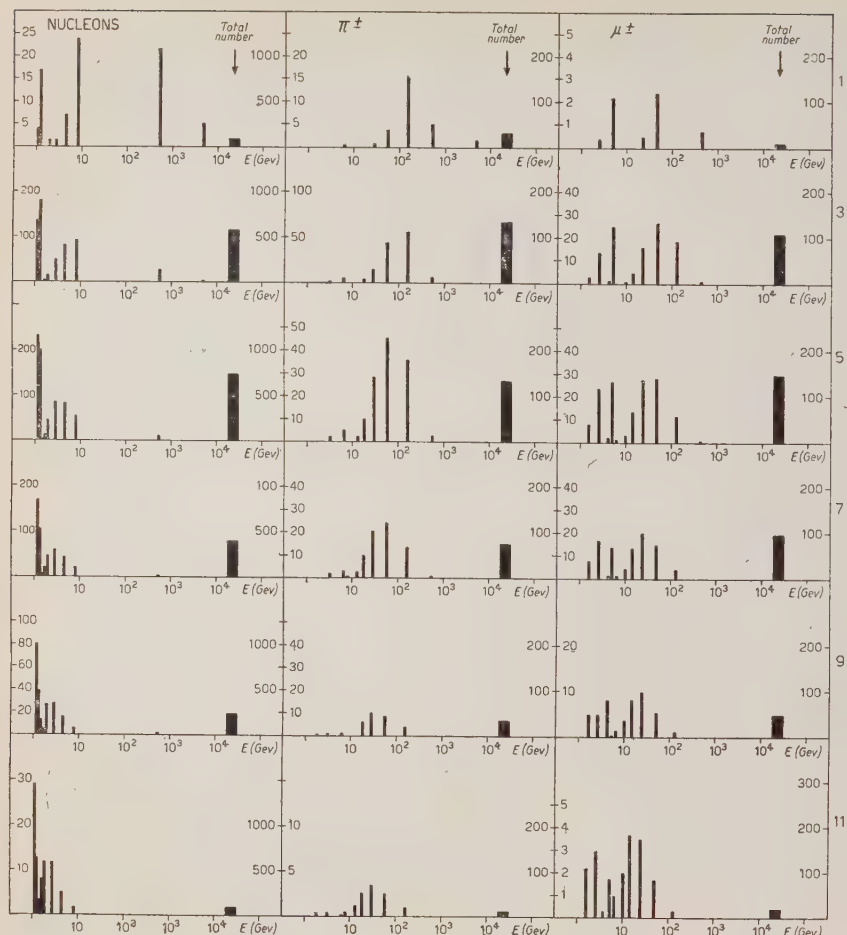


Fig. 11. — Energy spectrum on nucleons, pions and muons at various depths in the atmosphere (case A).

by 0.81 and the corresponding intensity by multiplying the intensity of the generating pions by n_s/s .

In order to obtain the soft component one has first to calculate the spectrum of the quanta produced by decay of the neutral pions at a depth between t' and $t' + dt'$. This « source spectrum » is obtained by multiplying the number of pions of the s -th generation by $1 + n_s/s$ and by the probability $p_s(t')dt'$ that

(⁷) H. SNYDER: *Phys. Rev.*, **76**, 1563 (1949).

the s -th collision occurs between t' and $t' + dt'$. The soft component at a depth t is obtained by integration on dt' between 0 and t of the «source spectrum» of γ rays multiplied by the usual multiplication function of shower theory (⁷)

$$(23) \quad \int_0^t p_s(t') dt' N\left(\frac{\varepsilon_s}{2}, 0, t-t'\right).$$

4. — Numerical results and remarks.

All the calculations have been done for a primary proton of $10^{15} \text{Mc}^2 = 0.94 \cdot 10^{14} \text{eV}$ energy. As already stated we have considered 2 different cases: totally anelastic collision at low energy (A) and equipartition of the kinetic energy among pions and recoiling nucleons at low energy (E).

The results are given in the form of graphs whose captions are self-explanatory.

Table II contains the intensities of the various components at $t = 675 \text{ g/cm}^2$.

While all other components have been calculated throughout the atmosphere, the soft component has been calculated by means of eq. (23) only at $t = 675 \text{ g/cm}^2$. The contribution due to knock-on and decay electrons of muons is not included in our numerical results.

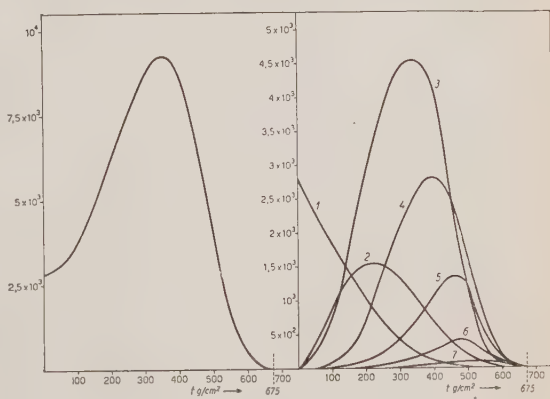


Fig. 12. — *a*) Source of γ rays due to the decay of π^0 of all generations as a function of depth (case A). *b*) Source of γ rays, due to π^0 decay of the various generations as function of depth (case A).

TABLE II. — *Intensity of the various components at $t = 675 \text{ g/cm}^2$.*

Case	I_e	I_π	I_μ	I_N	$(I_\pi + I_\mu + I_N)/I_e$
A	$3.93 \cdot 10^4$	55	77	345	0.012
E	$3.40 \cdot 10^3$	70	90	950	0.033

We should like to add the few following remarks.

The ratio of the penetrating component ($N + \pi^\pm + \mu$) to the electronic component at mountain altitudes turns out to be in case *A*, about 1 percent, and in case *E* about 3 percent. Although case *A* appears to be closer to the experimental data, one can not exclude case *E*.

The penetrating component appears to have too many nucleons and too few muons, especially in case *E*. This fact however is not necessarily an intrinsic consequence of Fermi's theory but probably of the fact that according to our assumption, the number of recoiling nucleons per collision against an air nucleus, remains constant also at very low energy, while the number of pions produced decreases rapidly. Such an inconvenience is much less pronounced in case *A* than in case *E* for two reasons. Firstly, the number of nucleons produced is lower; secondly, of the 345 nucleons present at depth $t = 675 \text{ g/cm}^2$ 220 have an energy lower than 2 GeV.

Therefore they give a very small contribution to the observed local production of penetrating secondaries.

According to recent experimental results on air showers ⁽⁸⁾ the ratio of the number of interacting penetrating particles (nucleons + pions) to the number of non-interacting penetrating particles (muons) is smaller than 1 and probably as low as 1/6. This value is still much lower than that obtained in case *A* considering only nucleons of energy larger than 2 GeV. Such a discrepancy is probably due, as explained above, to an overestimate of the number of recoiling nucleons.

⁽⁸⁾ K. SITE: *Phys. Rev.*, **87**, 351 (1952); D. BROADBENT: Private communication.

RIASSUNTO

Lo sviluppo longitudinale di uno sciame atmosferico dovuto ad un primario di 10^{14} eV viene calcolato numericamente con il metodo delle collisioni successive nell'ipotesi che nell'urto fra due corpuscoli di elevata energia la produzione di mesoni e nucleoni segua la teoria di Fermi. Alle alte energie ($W > 5000 \text{ GeV}$) si suppone che nell'urto vengano prodotti mesoni π^\pm e π^0 e coppie di nucleoni, mentre alle basse energie vengano prodotti solo π^\pm e π^0 . Alle basse energie vengono distinti due casi: il caso *A* in cui l'urto fra due nucleoni è totalmente anelastico, e il caso *E*, in cui nel sistema del baricentro l'energia si equipartisce fra i mesoni prodotti e i nucleoni che prendono parte all'urto. Lo sviluppo delle varie componenti attraverso l'atmosfera viene dato a mezzo di grafici. Mentre il rapporto della componente penetrante alla componente elettronica risulta in entrambi i casi del giusto ordine di grandezza (1% nel caso *A*, 3% nel caso *E*), la composizione della componente penetrante risulta, soprattutto nel caso *E*, troppo ricca di nucleoni.

Interferometria ultrasonora nei gas (IV). Assorbimento di ultrasuoni nell'ammoniaca.

S. PETRALIA

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto l'11 Aprile 1953)

Riassunto. — Si è misurato il coefficiente di assorbimento e la velocità di ultrasuoni nell'ammoniaca a 20 °C, a pressioni variabili tra 3 e 60 cm Hg e per la frequenza di 2,993 MHz della sorgente ultrasonora. L'assorbimento risulta superiore a quello prevedibile classicamente; il rapporto m_{sp}/mol_{cl} vale 1,81 per f/p variabile tra 4 e 50 MHz/atm e tende a diminuire per ulteriore aumento di f/p . Si osserva inoltre un aumento della velocità col crescere di f/p . Si interpretano questi fatti come conseguenza della lentezza degli scambi di energia tra stati di traslazione e di rotazione. Il tempo di rilassamento corrispondente vale $8,1 \cdot 10^{-10}$ s, e perciò la regione media della curva di dispersione cade intorno a 393 MHz. Il numero di collisioni per molecola, richiesto per uno scambio energetico, risulta uguale a 10. Si calcola inoltre il contributo alla viscosità di volume del gas per effetto del rilassamento rotazionale. Le misure sono state eseguite con un dispositivo interferometrico, che viene descritto.

Introduzione.

Misure di velocità e di assorbimento di ultrasuoni nell'ammoniaca gassosa, con lo scopo di verificare se in tale gas hanno luogo processi di dispersione, sono state eseguite da O. STEIL ⁽¹⁾, da A. VAN ITTERBEEK e L. LAUWERS ⁽²⁾, da K. F. BUSCHMANN e K. SCHÄFER ⁽³⁾ e da H. H. KELLER ⁽⁴⁾. Dalle misure

⁽¹⁾ O. STEIL: *Zeits. Phys. Chem.*, B **31**, 343 (1936).

⁽²⁾ A. VAN ITTERBEEK e L. LAUWERS: *Physica*, **12**, 241 (1946).

⁽³⁾ K. F. BUSCHMANN e K. SCHÄFER: *Zeits. Phys. Chem.*, B **50**, 73 (1941).

⁽⁴⁾ H. H. KELLER: *Phys. Zeits.*, **41**, 386 (1940).

di velocità è risultato che effettivamente nell'ammoniaca questa grandezza varia con la frequenza, per un campo di frequenze che è al di sotto di 1 MHz, e ciò, come è noto, si suole attribuire alla lentezza con cui avvengono gli scambi di energia tra i gradi di libertà di oscillazione e i gradi di libertà di traslazione. La variazione di velocità che si constata è piccola, dato il piccolo valore del calore specifico di oscillazione. KELLER, facendo uso di un metodo fondato sulla diffrazione della luce nel reticolo ultrasonoro, ha misurato il coefficiente di assorbimento nell'ammoniaca e nell'azoto e ha trovato valori che sono superiori a quelli, che, per questi gas, si possono calcolare classicamente, in base cioè alle perdite di energia per viscosità e per conduzione termica. Precisamente, il rapporto tra il coefficiente d'assorbimento sperimentalmente determinato e quello classico vale 1,67 per l'ammoniaca e 1,3 per l'azoto. Il campo di frequenze impiegato, o meglio i valori realizzati da KELLER per il rapporto f/p fra la frequenza ultrasonora e la pressione del gas, dal quale dipendono i processi di dispersione e assorbimento molecolare, vanno da circa 0,4 MHz/atm a 2,5 MHz/atm. KELLER ha prospettato l'ipotesi che, nei due casi, l'assorbimento anomalo possa, con molta probabilità, derivare dal ritardo con cui l'energia corrispondente ai gradi di libertà di rotazione si pone in equilibrio con l'energia di traslazione, ritardo già sensibile per le frequenze da lui impiegate. Poiché i valori sperimentali del coefficiente d'assorbimento dell'azoto si discostano dai valori classici, meno di quanto non avvenga per il coefficiente d'assorbimento dell'ammoniaca, e ancora per il fatto che i quanti di rotazione in quest'ultimo gas sono maggiori che nell'azoto, secondo KELLER, il tempo di rilassamento relativo alla energia di rotazione deve essere maggiore per l'ammoniaca che per l'azoto.

Di recente A. J. ZMUDA⁽⁵⁾ ha condotto misure di velocità e di assorbimento ultrasonoro nell'azoto, in un campo di frequenze tra 3 e 109 MHz/atm; egli ha confermato il valore del coefficiente di assorbimento determinato da KELLER, e ha trovato una variazione di velocità, che implica la scomparsa verso le frequenze elevate del contributo del calore specifico di rotazione, con un tempo di rilassamento di $1,2 \cdot 10^{-9}$ sec.

Io mi sono proposto, in analogia con le ricerche di ZMUDA, di determinare il coefficiente di assorbimento e la velocità di propagazione degli ultrasuoni nell'ammoniaca, per un più vasto campo di frequenze di quello realizzato da KELLER.

Procedimento sperimentale.

Mi sono servito per questo scopo di un interferometro a cammino variabile (fig. 1), che può considerarsi derivato fondendo insieme alcune caratteri-

(⁵) A. J. ZMUDA: *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, **23**, 472 (1951).

stiche dei modelli descritti da A. VAN ITTERBEEK ⁽⁶⁾ e da J. L. STEWART ⁽⁷⁾. La camera interferometrica è costituita da un cilindro di ottone di 2,5 cm di diametro, nel quale può scorrere senza gioco il riflettore, la cui superficie è stata lavorata insieme alla superficie terminale (A in fig. 1) della camera. Su quest'ultima superficie è tenuta, lievemente pressata con una molla, la piastrina di quarzo *Q*. Così viene automaticamente assicurato il parallelismo tra sorgente ultrasonora e riflettore. Ci si può rendere conto del grado di parallelismo realizzato, sostituendo la piastra di quarzo con una lastra piana di vetro, e osservando le frange di interferenza tra tale lastra e la superficie del riflettore. Con questo dispositivo i picchi della reazione ultrasonora sul generatore, al muovere del riflettore, sono risultati acutissimi; non si è notata presenza di satelliti, e si è potuto sperimentare con fasci ultrasonori di piccola energia. La camera interferometrica è fissata con araldite a un tubo di vetro pyrex a doppia parete; questo a sua volta è masticiato a una incastellatura, la quale porta la vite micrometrica, connessa al riflettore mediante una lunga asta, in parte di acciaio e in parte di vetro pyrex. Interferometro e tubo di vetro di sostegno sono circondati da altro tubo di pyrex, che li separa dall'esterno e viene tenuto in un termostato, la cui temperatura è regolata a 20 °C. Nel sistema viene fatto il vuoto, prima dell'introduzione del gas in esame, mediante pompa a diffusione.

L'ammoniaca viene preparata per azione di una soluzione concentrata di idrato di potassio su nitrato di ammonio, viene condotta attraverso un tubo lungo 4 metri, contenente in parte calce sodata e in parte idrato di potassio quali disidratanti, quindi viene liquefatta in una trappola immersa in un miscuglio di ghiaccio secco e acetone; dalla massa liquida una porzione viene distillata nell'apparecchio. Le misure sono state eseguite partendo da una pressione di circa 60 cm Hg fino a pressioni di 2,8 cm Hg, subito dopo che il gas era stato introdotto nell'apparecchio, riducendo via via la pressione attraverso la pompa.

Il circuito elettrico, che alimenta la sorgente sonora, è del tipo di Pierce, nel quale il cristallo di quarzo funziona da oscillatore elettrico e insieme da

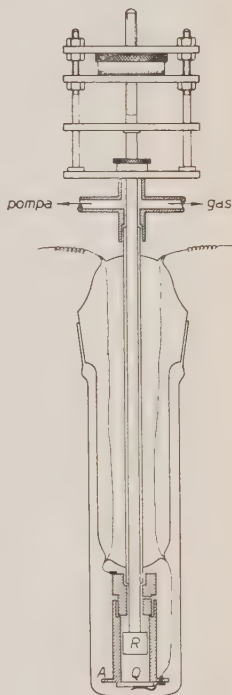


Fig. 1.

⁽⁶⁾ *Colloquium over Ultrasonore Trillingen* (Bruxelles, 1951), pag. 61.

⁽⁷⁾ J. L. STEWART: *Rev. Scient. Instr.*, **17**, 59 (1946).

generatore di onde ultrasonore. Esso è posto tra griglia e massa di un pentodo 6AG7; alla placca di questo è connesso un carico prevalentemente induttivo accordato, un dispositivo di compenso della corrente di placca e un galvanometro per osservare le fluttuazioni, che in tale corrente avvengono, quando il riflettore viene mosso. La frequenza di oscillazione è 2,993 MHz; la stabilità della frequenza e dell'ampiezza è notevole, soprattutto quando la pressione del gas nell'interferometro è al disopra di 8-10 cm Hg.

La precisione nelle misure di velocità, che con questo dispositivo si possono fare, è sostanzialmente determinata dalla precisione con cui il dispositivo stesso permette di misurare le lunghezze d'onda, e quindi di cogliere la posizione sulla testa della vite micrometrica di ogni picco di reazione acustica. Ora si constata che, man mano che la pressione diminuisce e l'assorbimento del gas aumenta, risulta più difficile localizzare i massimi e i minimi nella corrente di placca del tubo, e d'altra parte il numero di massimi che si possono contare, utili per la determinazione della lunghezza d'onda, diminuisce. Per la pressione minima di 2,8 cm Hg usata, si possono apprezzare quattro massimi e quattro minimi nella corrente di placca, a una distanza dal riflettore dalla sorgente di circa 1 mm. Per tal motivo non ho ritenuto conveniente spingere, col dispositivo di rivelazione in questo primo tempo realizzato, le misure verso pressioni più basse; qui l'errore nella misura della velocità si aggira su $\pm 0,2\%$.

La misura del coefficiente di assorbimento dell'energia ultrasonora per lunghezza d'onda è stata effettuata col metodo di W. H. PIELEMEIER e H. C. HARDY⁽⁸⁾. Il procedimento è ben noto ed è stato altre volte da me adoperato; esso, se è meno accurato rispetto ad altri metodi, offre il vantaggio di una maggiore speditezza, e d'altra parte è legato al tipo di alimentazione della sorgente ultrasonora qui impiegata. Si può affermare che l'errore nelle determinazioni eseguite è dell'ordine del 10% o meno.

Discussione dei risultati.

Nella tabella I sono raccolti i risultati delle misure di assorbimento, e precisamente nella colonna 3 compare il coefficiente d'assorbimento dell'energia ultrasonora per cm, m_{sp} , ricavato sperimentalmente per ogni valore del rapporto f/p realizzato; nella colonna 4 sono riportati i corrispondenti valori di m_{cl} calcolati dall'espressione classica

$$(1) \quad m_{cl} = \frac{\omega^2}{\gamma p V_0} \left\{ \frac{4}{3} \eta + K \frac{\gamma - 1}{\gamma C_v} \right\},$$

⁽⁸⁾ H. C. HARDY: *Journal Acoust. Soc. Amer.*, **15**, 91 (1943).

TABELLA I.

Pressione cm Hg	f/p MHz/atm	m_{sp} cm^{-1}	m_{cl} cm^{-1}	$\frac{m_{sp}}{m_{cl}}$
52,90	4,29	2,50	1,44	1,73
50,80	4,47	2,57	1,50	1,71
44,70	5,08	3,12	1,71	1,82
40,30	5,64	3,19	1,90	1,68
32,20	7,06	4,10	2,38	1,72
30,00	7,57	4,24	2,55	1,66
24,20	9,39	6,36	3,16	2,01
22,60	10,05	7,15	3,39	2,10
17,15	13,26	9,62	4,47	2,15
15,65	14,51	9,55	4,89	1,95
15,10	15,07	10,04	5,08	1,97
11,50	19,78	11,27	6,66	1,69
9,25	24,60	14,27	8,29	1,72
7,70	29,50	17,80	9,92	1,79
7,00	32,49	20,00	10,96	1,82
5,95	38,17	21,41	12,84	1,66
5,00	45,50	25,68	15,33	1,67
3,73	60,97	28,86	20,55	1,40
3,10	73,4	38,47	24,75	1,55
2,80	81,24	40,53	27,38	1,48

dove è $\omega = 2\pi f$; V_0 velocità di propagazione, indipendente dalla frequenza, in particolare determinata per frequenza nulla; $\gamma = C_p/C_v$, rapporto dei calori specifici; K coefficiente di conduttività termica e η viscosità ordinaria. Essendo per l'ammoniaca

$$(2) \quad \frac{K}{C_v} = 1,429\eta,$$

e ponendo $\gamma = 1,3$, valore sperimentale per questo gas alla temperatura di 20 °C, la precedente si può scrivere

$$(3) \quad \frac{m_{cl} V_0}{\omega} = 1,278 \frac{\eta}{p} \omega.$$

KOHLER ⁽⁹⁾ ha mostrato che, chiamando con τ_c il tempo medio intercorrente tra due collisioni molecolari, il coefficiente di viscosità η è dato da

$$(4) \quad \eta = 1,271 \tau_c p,$$

(9) M. KOHLER: *Zeits. Phys.*, **125**, 715 (1949).

per cui la (3) piglia la forma

$$(5) \quad \frac{m_{cl} V_0}{\omega} = 1,624 \omega \tau_c,$$

che sarà utile in seguito.

Dalla tabella I risulta che il coefficiente m_{sp} supera il valore classico m_{cl} , e se ciò si può attribuire al contributo di un termine di origine molecolare, m_{mol} , sarà manifestamente

$$(6) \quad m_{sp} = m_{cl} + m_{mol}.$$

Poichè, come abbiamo sopra notato, il calore specifico di oscillazione nell'ammoniaca è piccolo, il coefficiente di assorbimento di origine molecolare piuttosto notevole, che l'esperienza pone in evidenza, deve implicare l'energia di rotazione della molecola. Una teoria della dispersione ultrasonora, che si riferisca agli scambi di energia di traslazione e rotazione, non è stata ancora fatta, se si eccettuano alcune considerazioni dovute a P. MARIENS⁽¹⁰⁾. Nei calcoli fatti da altri Autori⁽⁵⁾, si suppone che si possa estendere al caso che ci interessa la teoria valevole per la dispersione ultrasonora, che si riferisce all'energia interna di oscillazione. Secondo uno sviluppo di espressioni, ben note in tale teoria, che danno il coefficiente m_{mol} , sviluppo fatto da K. F. HERZFELD e riportato da ZMUDA⁽⁵⁾, si può scrivere

$$(7) \quad \frac{m_{mol} V}{\omega} \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = \frac{R \omega C_i \tau'}{C_p C_\infty} (1 - \omega^2 \tau'^2);$$

con V velocità di propagazione per la frequenza ultrasonora $f = \omega/2\pi$,

$C_0 = C_v$ calore specifico totale a volume costante,

$C_p = C_0 + R$ calore specifico a pressione costante,

C_i = calore specifico dovuto all'energia di rotazione,

$C_\infty = C_0 - C_i$ calore specifico misurabile a frequenza infinita,

$\tau' = \tau C_\infty / C_0$, τ essendo il tempo di rilassamento per gli scambi di energia di traslazione e di rotazione.

La (7) vale nell'ipotesi di un gas perfetto; essa può qui applicarsi senz'altra correzione, poichè le misure vengono per la maggior parte condotte a bassa pressione.

Nel campo delle basse frequenze ultrasonore, dove è $\omega \tau' \ll 1$, si ha pure $V = V_0$ e la (7) diventa

$$(8) \quad \frac{m_{mol} V_0}{\omega} = \frac{R \omega C_i \tau'}{C_p C_\infty},$$

⁽¹⁰⁾ P. MARIENS: *Colloquium over Ultrasonore Trillingen* (Bruxelles, 1951), pag. 74.

e dalla (5) con la (8) si ottiene

$$(9) \quad \frac{m_{\text{mol}}}{m_{\text{cl}}} = \frac{RC_i}{1,624 C_p C_\infty} \frac{\tau'}{\tau_c}.$$

Essendo per l'ammoniaca, secondo la teoria cinetica, $C_0 = \frac{6}{2}R$, $C_p = 4R$, $C_i = \frac{3}{2}R$, $C_\infty = \frac{3}{2}R$, risulta

$$(10) \quad \frac{m_{\text{mol}}}{m_{\text{cl}}} = 0,153 \frac{\tau'}{\tau_c},$$

e

$$(11) \quad \frac{m_{\text{sp}}}{m_{\text{cl}}} = 1 + \frac{m_{\text{mol}}}{m_{\text{cl}}} = 1 + 0,153 \frac{\tau'}{\tau_c} = 1 + 0,076 \frac{\tau}{\tau_c}.$$

La colonna 5 della tabella I dà i valori del rapporto $m_{\text{sp}}/m_{\text{cl}}$; il valor medio di tale rapporto, fino alla frequenza di 45,5 MHz/atm è $1,81 \pm 0,16$, e si può ritenere in buon accordo con quello dato da KELLER, in base alle sue misure a bassa frequenza, che vale 1,67. L'accordo può essere reso migliore, rifacendo i calcoli di KELLER in base al valore di m_{cl} dato, per la temperatura di 20 °C e pressione atmosferica, da J. J. MARKHAM, R. T. BEYER, e R. B. LINDSAY⁽¹¹⁾ e del quale si è tenuto conto nelle determinazioni dei valori riportati nella colonna 4 della tabella I. È

$$(12) \quad \frac{m_{\text{cl}}}{f^2} = 1,126 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^2.$$

Notiamo poi che il rapporto $m_{\text{sp}}/m_{\text{cl}}$ tende a diminuire verso le frequenze più elevate da me usate, e tale diminuzione sembra effettiva, poichè si è sempre ripetuta nelle singole serie di misure, eseguite in condizioni sperimentali variate. Ora secondo la (7) e la (5) il rapporto $m_{\text{sp}}/m_{\text{cl}}$ va diminuendo col crescere della frequenza. La diminuzione, qui riscontrata, è però più rilevante di quanto non risulti da (7), e ciò, probabilmente, è da attribuire a cause di errore, che possono essere inerenti al metodo, che non si presta bene per esatte determinazioni del coefficiente d'assorbimento quando l'assorbimento è notevole, e possono anche derivare dal piccolo numero di picchi di reazione, che si può osservare verso i valori maggiori del rapporto f/p .

Il tempo τ_c , che compare nella (11) vale manifestamente $1/Z$, essendo Z il numero di urti che una molecola subisce in media in un secondo. Tale numero è stato calcolato per la temperatura di 20 °C e pressione atmosferica da

⁽¹¹⁾ J. K. MARKHAM, R. T. BEYER e R. B. LINDSAY: *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 391 (1951).

STEIL⁽¹⁾, assumendo come diametro delle molecole di ammoniaca $d = 2,86 \cdot 10^{-8}$ cm. È $Z = 13 \cdot 10^9$ e perciò risulta $\tau_c = 7,69 \cdot 10^{-11}$ s. Il valore di τ_c , così ottenuto, è d'altronde uguale a quello che si può dedurre dall'espressione (4) di KOHLER, ponendovi $\eta = 944 \cdot 10^{-7}$ poise. Valore alquanto diverso si ottiene per Z , se si assume come diametro molecolare quello dato da S. CHAPMAN e T. G. COWLING⁽¹²⁾, cioè $d = 4,41 \cdot 10^{-8}$ cm, e si fa ricorso a una espressione per Z un po' diversa di quella usata da STEIL; si troverebbe allora $Z = 30 \cdot 10^9$ e $\tau_c = 3,3 \cdot 10^{-11}$ s. Dalla (11) si deduce, in corrispondenza ai due valori di τ_c ,

$$(13) \quad \tau = 8,1 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \text{oppure} \quad \tau = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

Nel tempo τ hanno luogo circa 10 collisioni molecolari: la persistenza di un quanto di energia di rotazione è perciò dell'ordine di 10 collisioni.

Si può confrontare il tempo di rilassamento τ col tempo di rilassamento $\bar{\tau}$ caratteristico dei gradi di libertà di traslazione. Quest'ultimo è stato calcolato, per vari gas, da KOHLER⁽⁹⁾, e per l'ammoniaca vale $\bar{\tau} = 9,6 \cdot 10^{-11}$ s, cioè da 4 a 8 volte minore di τ . La regione di dispersione rotazionale deve quindi sovrapporsi in parte alla regione, in cui si originano effetti di dispersione relativi ai gradi di libertà di traslazione; entrambi infatti si estendono verso le basse pressioni del gas.

La conoscenza di τ ci permette anche di determinare il coefficiente di viscosità di volume dell'ammoniaca. È noto che accanto al coefficiente di viscosità ordinario, più sopra indicato con η , si suole introdurre una viscosità di volume ξ , la quale sta ad indicare che una piccola frazione del lavoro speso in una compressione isotropa di un mezzo, viene perduto. Tale coefficiente è trascurato nella teoria dell'assorbimento dell'energia sonora formulata da STOKES, e da qualche autore (L. TISZA⁽¹³⁾, J. MEIXNER⁽¹⁴⁾, ecc.) è stato osservato, che in ciò può consistere la discrepanza tra i valori sperimentali dell'assorbimento ultrasonoro e quelli teorici. KOHLER⁽⁹⁾ interpreta la viscosità di volume nei gas come conseguenza della lentezza con cui avviene la ripartizione dell'energia di traslazione nei gradi interni delle molecole, e, nel caso che alla temperatura dell'esperienza siano eccitabili solo livelli energetici di rotazione, la viscosità di volume vale

$$(14) \quad \xi = \frac{2}{3} \frac{f_r}{3 + f_r} p \tau,$$

(12) S. CHAPMAN e T. G. COWLING: *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge, 1939).

(13) L. TISZA: *Phys. Rev.*, **61**, 531 (1942).

(14) J. MEIXNER: *Ann. Phys.*, **43**, 470 (1943).

essendo τ il tempo di rilassamento di rotazione e f_r il corrispondente numero dei gradi di libertà. Per l'ammoniaca $f_r = 3$ e ponendo $\tau = 8,1 \cdot 10^{-10}$ s, il contributo alla viscosità di volume, dovuto al rilassamento rotazionale, vale $2,73 \cdot 10^{-4}$ poise.

Possiamo ancora osservare che il tempo τ per l'ammoniaca risulta minore del τ caratteristico per l'azoto, che secondo ZMUDA ⁽⁵⁾ vale $1,2 \cdot 10^{-9}$ s. Ciò appare contrario alle previsioni di KELLER ⁽⁴⁾, le quali, come sopra abbiamo ricordato, erano basate sul maggior assorbimento e sul valore più elevato dell'energia di rotazione dell'ammoniaca rispetto all'azoto. Probabilmente questi non sono criteri validi per poter concludere sul valore approssimativo di un tempo di rilassamento. Si può, ad esempio, notare che, secondo misure riferentesi alla dispersione di oscillazione di varie specie molecolari, a un maggiore assorbimento ultrasonoro corrisponde una frequenza di massimo assorbimento più elevata ⁽¹⁵⁾, e quindi un τ più piccolo. D'altra parte, probabilmente, la regione spettrale, in cui cade il rilassamento acustico, oltre che dall'entità dell'energia interna, è determinata dalle modalità con cui avvengono gli urti intermolecolari.

La frequenza per la quale si ha un flesso nella curva di dispersione della velocità sonora, cioè la frequenza intorno alla quale si estende la regione mediana di tale curva, dipende da τ ed è

$$(15) \quad f_w = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{C_0}{C_\infty} = 393 \text{ MHz},$$

avendo preso $\tau = 8,1 \cdot 10^{-10}$ s. Alcuni valori della velocità, determinati sperimentalmente, sono riportati nella tabella II; essi si riferiscono a frequenze ultrasonore comprese tra 4 e 80 MHz e cadono quindi nel tratto iniziale della

TABELLA II.

f/p MHz/atm	V m/s	f/p MHz/atm	V m/s
4,29	430,4	24,60	434,2
5,64	430,7	32,49	435,1
7,57	430,4	38,17	435,5
9,39	431,5	60,27	434,6
13,26	432,2	73,40	435,9
15,07	432,1		

⁽¹⁵⁾ E. F. FRICKE: *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, **12**, 245 (1940).

curva di dispersione. Questa deve tendere al limite superiore $V_{\infty} : 481,2$ m/s, se per V_0 si assume il valore sperimentale di 430,4 m/s.

Desidero ringraziare qui il prof. G. VALLE per i mezzi messi a mia disposizione e i suggerimenti datimi.

SUMMARY (*)

The absorption coefficient and the velocity of ultrasonics in ammonia at 20 °C and pressures variable between 3 and 60 cm Hg have been measured at the frequency 2.993 MHz of the ultrasonics source. The absorption results greater than the one classically foreseen; the ratio m_{sp}/m_{cl} is 1.81 for f/p variable between 4 and 50 MHz and shows a tendency to diminution for greater values of f/p . Also increasing velocity was observed with increasing f/p . Those facts are interpreted as a consequence of the slowness of energy exchanges between translation and rotation states. The corresponding relaxation time is $8.1 \cdot 10^{-10}$ s and, therefore, the middle region of the dispersion curve is situated at about 393 MHz. The number of collisions necessary for an exchange of energy is 10. The contribution to the volume viscosity of the gas due to rotational relaxation is further computed. The measures were taken with an interferometric device which is described.

(*) *Editor's translation.*

Applicazione di filtri interferenziali alla fotometria e alla colorimetria.

M. ARTOM, C. M. GARELLI e C. GENTILE

Laboratorio di Fotometria dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale «G. Ferraris» - Torino

(ricevuto il 16 Aprile 1953)

Riassunto. — Viene proposta una applicazione dei filtri interferenziali a cuneo di Dufour e di Turner alla fotometria e alla colorimetria. Si studia la possibilità di ottenere un filtro di curva spettrale determinata, applicando un diaframma di forma opportuna sul cuneo. In particolare si è calcolato il profilo del diaframma che permette di ottenere un filtro a fattore di trasmissione costante in un dato intervallo spettrale.

1. - Introduzione.

I filtri interferenziali ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, che negli ultimi anni hanno formato l'oggetto di numerosissime ricerche e la cui tecnica di costruzione si può attualmente considerare assai perfezionata, permettono di risolvere problemi che sovente si presentano nel campo della fotometria e della colorimetria.

Nel caso più semplice di un filtro interferenziale a trasmissione formato da due strati metallici identici semitrasparenti di spessore s separati da un dielettrico di spessore Δ (fig. 1), L. N. HADLEY e D. M. DENNISON hanno dedotto in modo rigoroso la seguente espressione per il fattore di trasmissione $\tau(\lambda)$:

$$(1) \quad \tau(\lambda) = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} + y \right)},$$

⁽¹⁾ L. N. HADLEY and D. M. DENNISON: *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **37**, 451 (1947).

⁽²⁾ L. N. HADLEY and D. M. DENNISON: *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **38**, 483 (1948).

⁽³⁾ F. ABELÈS: *Revue d'Optique*, **28**, 11 (1949).

⁽⁴⁾ A. F. TURNER: *Journ. de Phys.*, **11**, 444 (1950).

nella quale λ è la lunghezza d'onda della radiazione, ϑ è l'angolo di incidenza dei raggi luminosi, T e R sono rispettivamente il fattore di trasmissione e di riflessione dello strato metallico; y è la differenza di fase tra raggio incidente e raggio trasmesso dallo strato metallico e n è l'indice di rifrazione del dielettrico.

È stata pure studiata la realizzazione di filtri interferenziali a cuneo ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾, la cui curva di trasmissione varia con continuità.

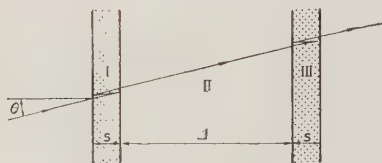


Fig. 1.

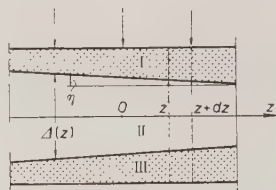


Fig. 2.

La fig. 2 rappresenta schematicamente un tale filtro in cui lo spessore Δ del dielettrico è una funzione lineare della ascissa z .

L'angolo η del cuneo è ovviamente molto piccolo: nel caso in cui il cuneo sia previsto per il campo del visibile, la variazione massima di Δ è dell'ordine di qualche migliaio di Å, mentre la lunghezza del cuneo è di parecchi centimetri.

Per incidenza normale all'asse z ogni elemento di filtro compreso tra le ascisse z e $z + dz$ si comporta come un filtro di fattore di trasmissione:

$$(2) \quad \tau(\lambda, z) = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} n \Delta(z) + y \right]},$$

in cui non solo Δ , ma anche R , T e y sono in generale funzioni di z .

Se $\Phi(\lambda, z) dz = I(\lambda) \varphi(z) dz$ è il flusso luminoso che incide normalmente sulla porzione del cuneo compresa tra z e $z + dz$, il flusso trasmesso dall'intero filtro sarà evidentemente:

$$(3) \quad I(\lambda) \int \varphi(z) \tau(\lambda, z) dz = G(\lambda) I(\lambda),$$

essendo l'integrale esteso a tutta la lunghezza del cuneo.

⁽⁵⁾ CH. DUFOUR: *Journ. de Phys.*, **11**, 353 (1950).

⁽⁶⁾ A. F. TURNER and O. A. ULLRICH: *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **38**, 662 (1948).

Nella (3) la funzione $G(\lambda)$ si può interpretare come il fattore di trasmissione spettrale dell'intero filtro, il suo andamento in funzione di λ dipende dalla scelta della funzione $\varphi(z)$, cioè dalla legge di distribuzione del flusso luminoso incidente nella direzione z .

La determinazione di una funzione $\varphi(z)$ che soddisfi alla

$$(4) \quad \int \varphi(z) \tau(\lambda, z) dz = G(\lambda),$$

in cui $G(\lambda)$ è una funzione assegnata, permette quindi di ottenere un filtro di data curva di trasmissione spettrale $G(\lambda)$. È questo un problema che si presenta molto frequentemente in ottica.

Con criterio analogo è stato realizzato sperimentalmente da J. TERRIEN ^(?) un filtro avente una curva di trasmissione spettrale eguale alla curva di visibilità dell'occhio.

2. — Calcolo della funzione $\varphi(z)$.

Utilizzando i risultati teorici di L. N. HADLEY e D. M. DENNISON la determinazione della $\varphi(z)$ si può in molti casi ottenere per via analitica.

In particolare questo è possibile quando la funzione $G(\lambda)$ rappresenta la curva di trasmissione di un filtro di banda, cioè è nulla per $\lambda < \lambda_1$ e $\lambda > \lambda_2$ ed è costante per $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ (fig. 3).

La conoscenza delle proprietà ottiche delle lamine metalliche sottili ed i risultati contenuti nei lavori di L. N. HADLEY e D. M. DENNISON ed altri ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾ permettono di ottenere, scegliendo in modo opportuno il metallo e lo spessore s degli strati I e III, che le grandezze R , T e y siano con sufficiente approssimazione costanti lungo tutta la zona utile del filtro, in cui la $\varphi(z)$ ha valori sensibilmente diversi da zero.

In pratica la regione utile del filtro, come risulta dal calcolo, ha una lunghezza tale da permettere la realizzazione di queste condizioni con un opportuno profilo a cuneo degli strati metallici I e III (fig. 2).

Il fattore di trasmissione del filtro $\tau(\lambda, z)$ è massimo per una λ_{\max} tale che l'argomento del seno nella (2) vale:

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\max}} n \Delta(z) + y = r\pi, \quad (r = 1, 2, \dots)$$

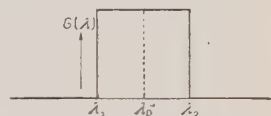


Fig. 3.

^(?) M. JEAN TERRIEN: *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **230**, 1462 (1950).

⁽³⁾ F. GOOS: *Zeits. f. Phys.*, **100**, 95 (1936).

poichè Δ è una funzione lineare di z , anche λ_{\max} varierà linearmente con z .

Fissata l'origine delle coordinate in modo che il massimo di $\tau(\lambda, 0)$ si abbia per una lunghezza d'onda che corrisponde al centro della banda spettrale desiderata (fig. 3), si indichino con l e $-l$ le ascisse per cui $\tau(\lambda, z)$ è massimo per $\lambda = \lambda_2 = \lambda_0 + \delta\lambda/2$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_0 - \delta\lambda/2$ rispettivamente, essendo $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la larghezza della banda.

Se si pone:

$$x = \frac{z}{l} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\delta\lambda},$$

la (2) diventa una funzione di α e x che si può scrivere:

$$(5) \quad K(\alpha, x) = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \xi},$$

dove è

$$(6) \quad \xi = 2(r\pi - y) \frac{\varrho(x - \alpha)}{1 + \varrho\alpha},$$

essendo

$$(7) \quad \varrho = \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_0}.$$

La (4) assume quindi la forma:

$$(8) \quad T^2 \int f(x) \frac{dx}{1 + R^2 - 2R \cos \xi} = F(\alpha),$$

e la $F(\alpha)$ è definita in questo modo:

$$(9) \quad \begin{cases} F(\alpha) = D & \text{per } -1 \leq \alpha \leq +1 \\ F(\alpha) = 0 & \text{per } \begin{cases} \alpha < -1 \\ \alpha > +1 \end{cases} \end{cases}$$

Se ci si limita allo studio di bande spettrali $\delta\lambda \leq 500 \text{ \AA}$ nel campo del visibile (che sono quelle che interessano nei casi pratici della colorimetria), ϱ è in generale inferiore a 0,05, e poichè α è dell'ordine dell'unità, si può trascurare $\varrho\alpha$ rispetto ad 1 nel denominatore della (6) e porre:

$$(10) \quad \xi \cong 2\varrho(r\pi - y)(x - \alpha).$$

Finchè è lecita questa approssimazione, il nucleo $K(\alpha, x)$ dell'equazione integrale (8) è simmetrico rispetto allo scambio di x con $-\alpha$. Inoltre essendo $|R| < 1$ si ha lo sviluppo assolutamente ed uniformemente convergente:

$$K(\alpha, x) = \frac{T^2}{1 - R^2} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R^m \cos mB(x - \alpha) \right],$$

con $B = 2\varrho(r\pi - y)$.

D'altra parte è noto lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $F(x)$ definita dalle (9). Si avrà quindi:

$$(11) \quad \frac{T^2}{1 - R^2} \int_{-\pi/B}^{\pi/B} f(x) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R^m \cos mB(x - \alpha) \right] dx = \\ = \frac{2D}{\pi} \left[\frac{B}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mB}{m} \cos mB\alpha \right],$$

dove per opportunità di calcolo si è estesa l'integrazione all'intervallo $-\pi/B \rightarrow +\pi/B$.

Se si pone:

$$f(x) = \sum_{m=0}^N (a_m \cos mBx + b_m \sin mBx)$$

e ci si arresta nella (11) al termine N -esimo dello sviluppo, tenendo conto delle relazioni di ortogonalità delle funzioni trigonometriche, ed uguagliando i coefficienti di $\cos mBx$ e $\sin mBx$, si ha:

$$(12) \quad b_m = 0, \quad a_0 = \frac{DB^2(1 - R^2)}{2\pi^2 T^2} \\ a_m = \frac{DB(1 - R^2)}{\pi^2 T^2} \frac{\sin mB}{mR^m}.$$

La funzione $f(x)$ che risolve il problema è perciò:

$$(13) \quad f(x) = \frac{DB(1 - R^2)}{2\pi^2 T^2} \left(B + 2 \sum_{m=1}^N \frac{\sin mB \cos mBx}{mR^m} \right).$$

Al crescere del valore di N il fattore di trasmissione del filtro ottenuto mediante la $f(x)$, approssima indefinitamente l'andamento della $F(x)$. Il valore di N sarà scelto di volta in volta a seconda della approssimazione richiesta. Poichè $|R| < 1$ il secondo membro della (13) non converge a nessuna fun-

zione $f(x)$, ma le successive ridotte rappresentano funzioni $f_N(x)$ che risolvono praticamente il problema con approssimazione sempre maggiore.

La (13) definisce la $f(x)$ nell'intervallo $-\pi/B \mapsto +\pi/B$, però in pratica la $f(x)$ ha valori significativi in un intervallo molto minore, la cui lunghezza dipende dai valori delle costanti nei diversi casi.

Una semplice trasformazione permette di porre la $f(x)$ nella forma:

$$(14) \quad f(x) = \frac{DB^2(1-R^2)}{2\pi^2 T^2}.$$

$$\left[-1 + \int_{-1}^x \frac{R^{-1} \cos B(1+x) - R^{-(N+1)} \cos(N+1)B(1+x) + R^{-(N+2)} \cos NB(1+x)}{1 - 2R^{-1} \cos B(1+x) + R^{-2}} dx + \right. \\ \left. + \int_x^{+1} \frac{1 - R^{-1} \cos B(1-x) - R^{-(N+1)} \cos(N+1)B(1-x) + R^{-(N+2)} \cos NB(1-x)}{1 - 2R^{-1} \cos B(1-x) + R^{-2}} dx \right],$$

che in certi casi (per N molto elevato) può essere più vantaggiosa per il calcolo numerico.

Si è calcolata la $f(x)$ in un caso particolare, cioè per i seguenti valori delle costanti:

$$R = 0,95, \quad B = 0,2 \quad (*),$$

considerando i primi 110 termini della successione (13) e limitando l'intervallo di variabilità della x da -2 a $+2$ circa; la funzione ottenuta è illustrata in fig. 4.

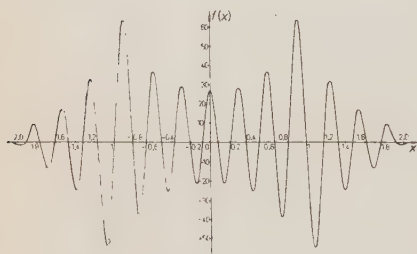


Fig. 4.

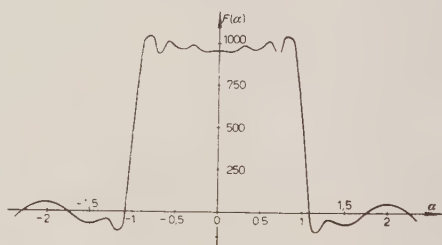


Fig. 5.

(*) Per esempio nel campo del visibile, per $r = 1$ (spettro del primo ordine), se $\delta\lambda = 500 \text{ \AA}$ e $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ sarà per la (7) $\varrho = 0,05$, ed in questo intervallo di lunghezze d'onda per $R = 0,95$, in base ai risultati di HADELY e DENNISON si può assumere $\pi - y = 2$.

Sostituendo la $f(x)$ calcolata nell'integrale (8) si è ottenuta la funzione $F(\alpha)$ illustrata in fig. 5 (la scala delle ordinate nelle figg. 4 e 5 è in unità arbitrarie).

3. — Realizzazione sperimentale.

La funzione $f(x)$ rappresenta il profilo di un diaframma da appoggiare su un filtro a cuneo in modo che il fattore di trasmissione complessivo risulti eguale alla funzione $F(\alpha)$. Come si vede dalla fig. 4 la $f(x)$ è una funzione oscillante che assume valori positivi e negativi.

In pratica si potrà separare il filtro in due parti: su una di queste si appoggerà il profilo che corrisponde a valori positivi della $f(x)$ e sull'altra quello corrispondente a valori negativi.

Il flusso luminoso trasmesso dalle due porzioni verrà raccolto su due ricevitori fisici (cellule fotoelettriche o termopile) collegati con un opportuno circuito che permetta di misurare direttamente la differenza delle loro risposte.

È possibile coprire tutto il campo del visibile con due o al massimo tre filtri a cuneo abbastanza lunghi (6 ÷ 10 cm) nei quali i valori di R , T e y siano sensibilmente costanti; in queste condizioni sarà facile costruire e regolare la posizione dei diaframmi con la precisione richiesta, e con l'uso di diversi profili si potrà realizzare un gran numero di filtri di banda.

Questo dispositivo appare particolarmente indicato per risolvere il problema della misura del flusso luminoso di lampade fluorescenti nelle otto regioni spettrali prescritte per caratterizzare le proprietà di resa di colore di queste sorgenti ⁽⁹⁾.

Il procedimento di calcolo sopradescritto permette inoltre di calcolare analiticamente il profilo di diaframmi (funzioni $f(x)$) da applicare su un filtro a cuneo, per ottenere una curva di trasmissione assegnata $F(\alpha)$, tutte le volte che sia lecita l'approssimazione (10) e purchè si sviluppi la $F(\alpha)$ in serie di Fourier.

D'altra parte quando la (10) non si può ritenere valida, e ciò accadrà, per esempio, quando $\varrho = \delta\lambda/2\lambda_0$ è molto grande, converrà approssimare la $f(x)$ mediante una funzione continua a tratti, dividendo l'intervallo in cui essa è definita in un numero sufficiente H di parti. La (8) diviene allora:

$$(15) \quad \sum_{n=1}^H c_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{1 + R^2 - 2R \cos \xi} = F(\alpha),$$

⁽⁹⁾ COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ÉCLAIRAGE: *Compte rendu des Séances* (1948), p. 245.

che scritta per H valori differenti di α conduce ad un sistema di equazioni lineari la cui soluzione fornisce le H costanti c_h .

Questo metodo si può applicare, ad esempio, quando $F(\alpha)$ rappresenti la curva di visibilità internazionale.

Ringraziamo il prof. R. DEAGLIO per averci proposto il tema di questo lavoro e per il continuo incoraggiamento e gli utili consigli; ed i proff. F. TRICOMI e G. ZIN per i molti, preziosi suggerimenti.

SUMMARY

The applicability to colorimetry and photometry of the wedge interference filter proposed by DUFOUR and TURNER is discussed. A method for obtaining a filter of assigned spectral transmission curve by means of a properly shaped template placed on the wedge is investigated. A mathematical procedure to calculate the shape of such a template is derived and the computation carried out for the case of a filter of constant transmission over a given spectral range in the visible region.

NOTE TECNICHE

Uno stimolatore elettronico comandato dai potenziali biologici (*).

P. L. BONFERRONI (**) e M. CONVERSI

Istituto di Fisiologia e Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

(ricevuto il 27 Marzo 1953)

Riassunto — Viene descritto uno stimolatore elettronico, comandato da potenziali biologici, destinato a riprodurre meccanismi d'autoregolazione normalmente legati all'attività del sistema nervoso centrale. Si illustra una delle possibili applicazioni dell'apparecchio e si descrivono nei particolari alcuni dei circuiti che di esso fanno parte.

1. — Introduzione.

La temperatura del corpo, la frequenza dei battiti cardiaci ed in generale tutte le grandezze fisiche legate alle attività fisiologiche, oscillano entro limiti relativamente ristretti di fronte ai cambiamenti che si verificano nell'ambiente. Questo avviene perchè il sistema nervoso, incessantemente informato di quello che si svolge all'interno ed all'esterno dell'organismo, esplica una continua azione di controllo sulle attività della vita animale e vegetativa.

L'analogia con quello che avviene nel mondo non vivente (principio di Le Châtelier, legge di Neumann-Lenz, ecc.) è stata già da tempo notata, ma è solo con il recente, rapido, sviluppo della tecnica elettronica e con le sue numerose applicazioni in biologia, che sono stati posti maggiormente in evidenza i legami che uniscono il mondo fisico e quello biologico. Così, per esempio, è stata sottolineata la stretta analogia tra i fenomeni d'inibizione, che tanta importanza hanno nella regolazione riflessa delle attività dell'organismo, ed il comportamento dei circuiti elettronici dotati di reazione negativa ⁽¹⁾.

(*) Lavoro eseguito presso il laboratorio Biofisico dell'Istituto di Fisiologia, con mezzi messi a disposizione dalla Rockefeller Foundation.

(**) Local research fellow della Rockefeller Foundation.

(1) N. WIENER: *Cybernetics* (New York, 1948), Cap. IV.

Nel presente lavoro verrà descritto un apparato elettronico comandato dai potenziali biologici e capace di stimolare elettricamente quello stesso organismo vivente dal quale il segnale di comando è prelevato. Questo apparato viene quindi a trovarsi nella stessa posizione del sistema nervoso centrale, giacchè la sua entrata e la sua uscita sono connesse con l'organismo vivente, così come i centri nervosi sono uniti con la periferia attraverso i nervi sensitivi e motori.

Poichè le caratteristiche ed i principi di funzionamento dello stimolatore sono noti, si potrà tentare, riproducendo con esso fenomeni che si manifestano negli organismi viventi, di rappresentare ed interpretare, con dei modelli fisici e matematici, almeno le funzioni riflesse più elementari del sistema nervoso centrale.

2. - Funzionamento.

La caratteristica principale del complesso costruito in base ai ragionamenti ora esposti, consiste nel poter generare stimoli rettangolari comandati dagli stessi « potenziali d'azione » del preparato biologico. Il funzionamento dello stimolatore è illustrato schematicamente nella fig. 1. Il potenziale d'azione

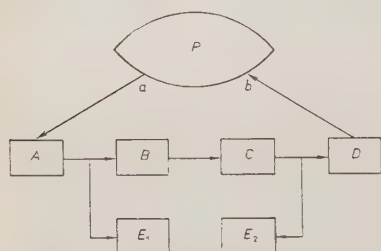


Fig. 1. - Schema generale di funzionamento: A = amplificatore differenziale lineare; B = ritardatore; C = generatore dei treni d'impulsi; D = separatore a radiofrequenza; E_1 , E_2 = circuiti di numerazione; P = preparato biologico.

pulsi di comando. Se l'effetto di questi treni sarà quello di aumentare il periodo con cui i potenziali bioelettrici si susseguono, tale periodo crescerà fino al raggiungimento di una condizione di equilibrio; in caso contrario, il periodo diminuirà fino al minimo compatibile con la struttura biologica in esame.

I segnali bioelettrici amplificati vengono contati (direttamente) dal circuito di numerazione E_1 . Gli impulsi rettangolari dei treni d'onde all'uscita del circuito C sono a loro volta registrati (previa demoltiplicazione) dal numeratore E_2 . Il rapporto n_2/n_1 tra i numeri registrati in un certo intervallo di

è prelevato da un punto a del preparato biologico P . Convenientemente amplificato dall'amplificatore (A), il segnale biologico di comando è inviato ad un circuito (B) che, dopo un tempo prefissabile, produce a sua volta un secondo impulso. Questo secondo impulso viene utilizzato per comandare un generatore (C) che emette (senza apprezzabile ulteriore ritardo), un treno di onde rettangolari. Sia la lunghezza di questo treno, sia la cadenza (« repetition rate ») l'ampiezza e la durata delle onde che lo compongono, sono regolabili entro ampi limiti. Attraverso uno stadio di separazione a radiofrequenza (D), che è descritto in dettaglio più avanti, i treni di onde rettangolari possono essere utilizzati per stimolare il preparato in un punto b , mentre dal punto a continuano a provenire gli im-

tempo dai due circuiti E_2 , E_1 fornisce perciò il numero medio di impulsi da cui è formato ciascun treno.

Un esempio di applicazione, in cui il periodo del sistema preparato-impulsatore tende ad aumentare, è il seguente (vedi fig. 2): Sia A il cuore di un animale

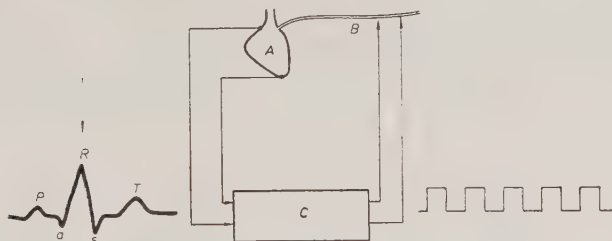


Fig. 2. - Esempio di applicazione dell'impulsatore: A = cuore; B = nervo vago; C = impulsatore, comandato dai potenziali cardiaci (onda R). All'entrata ed all'uscita di C è indicato l'andamento delle d.d.p. in funzione del tempo.

vertebrato, mantenuto in condizioni tali da pulsare regolarmente, e sia B un segmento di nervo vago, separato dai centri nervosi d'origine e terminante sul cuore. È noto che, eccitando il nervo vago mediante impulsi elettrici di opportune caratteristiche, si ottiene una diminuzione della frequenza dei battiti cardiaci. È anche noto che ad ognuno di questi battiti è associata nel

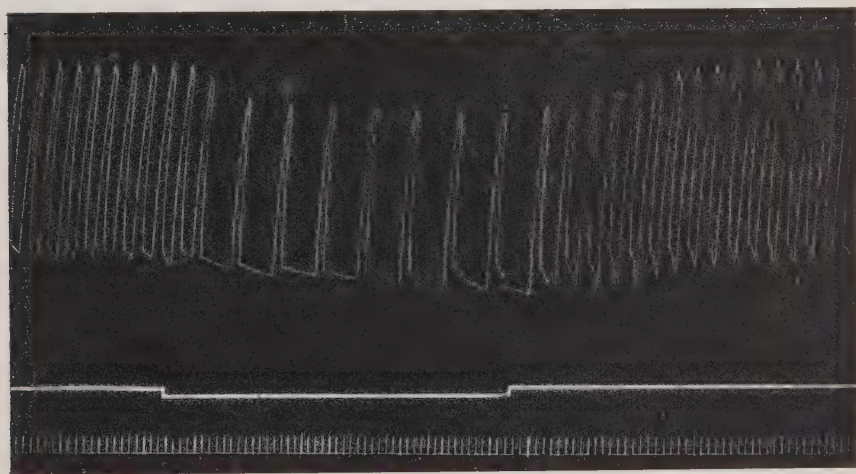


Fig. 3. - Esempio di rallentamento del battito cardiaco, ottenuto stimolando, con la disposizione sperimentale di fig. 2, il nervo vago di un rospo (*bufo vulgaris*). Dal basso in alto i grafici rappresentano: I) il tempo in secondi; II) l'inizio (gradino discendente) e la fine (gradino ascendente) del funzionamento dell'impulsatore; III) la contrazione del cuore, rallentata durante l'applicazione dello stimolo al nervo vago.

tempo una determinata successione di potenziali bioelettrici il più ampio dei quali (dell'ordine di 10^{-3} V) è la cosiddetta «onda R». Nel nostro caso, è proprio questa onda R che determina il funzionamento dell'impulsatore. Attraverso la stimolazione del nervo vago, si ottiene così un rallentamento del battito cardiaco e del ritmo della stimolazione stessa. Nella nuova condizione di equilibrio il cuore pulsa ad una frequenza minore di quella normale, ma con ritmo egualmente regolare (fig. 3).

Gli impulsi vengono prelevati ed inviati al preparato biologico a mezzo di speciali elettrodi, atti a rendere minime le f.e.m. di contatto.

3. — Descrizione.

Amplificatore (fig. 1-A). — È composto di 4 stadi (ad amplificazione lineare) in controfase; i primi due sono del tipo differenziale per eliminare eventuali disturbi indotti. Il loro uso è stato introdotto, nella tecnica delle registrazioni biologiche, fin dal 1934 ^(2,3). L'ultimo stadio, ad accoppiamento diretto, è costituito da un trasferitore catodico. Lo chassis è sospeso elasticamente per evitare microfonicità. Tutti i componenti del primo stadio sono di costruzione speciale per minimizzare il fruscio di fondo. È incorporato un circuito per la generazione manuale d'impulsi rettangolari di calibrazione (da 50 μ V a 100 mV). Un semplice filtro passa-basso, regolabile a scatti, è disposto all'entrata del terzo stadio. Ugualmente regolabile a scatti, è il controllo dell'amplificazione, sia per ragioni di stabilità che per evitare i disturbi dovuti al cursore dei potenziometri.

Le caratteristiche di massima (che si ispirano a quelle del preamplificatore Grass modello P₄), sono (a filtri esclusi): amplificazione in tensione: $3 \cdot 10^4$; limiti di amplificazione da 0,5 Hz a 10^4 Hz (50% a $2,5 \cdot 10^4$ Hz); impedenza d'entrata $> 1 \text{ M}\Omega + 20 \mu\text{F}$; impedenza d'uscita $4 + 4 \text{ K}\Omega$; massimo segnale all'entrata 0,5 V (per amplificazione lineare); coefficiente di discriminazione $2,5 \cdot 10^4$.

Ritardatore (fig. 1-B) e *generatore dei treni* (fig. 1-C). — Sono composti, nell'ordine, dai seguenti stadi (fig. 4):

B) V1, *stadio d'entrata*, consta di un multivibratore (MV) monostabile («one-shot») ad accoppiamento catodico (*). Quando i segnali biologici che giungono da A (fig. 1) (e di cui si può variare l'ampiezza col potenziometro d'entrata) superano il suo livello di soglia, esso produce un impulso ($\sim 10^{-4}$ s) che dà inizio al funzionamento di tutto il complesso.

V2 trasferitore catodico.

V3 circuito dei ritardi. È costituito da un MV in condizione monostabile, comandato dall'impulso proveniente da V2. Mediante derivazione del suo

(2) B. MATTHEWS: *Journ. of Physiol.*, **81**, 28P (1934).

(3) F. TÖNNIES: *Rev. Sci. Inst.*, **9**, 95 (1938).

(*) Schema del tipo suggerito dal prof. B. RISPOLI e impiegato con successo in apparati elettronici per lo studio dei raggi cosmici.

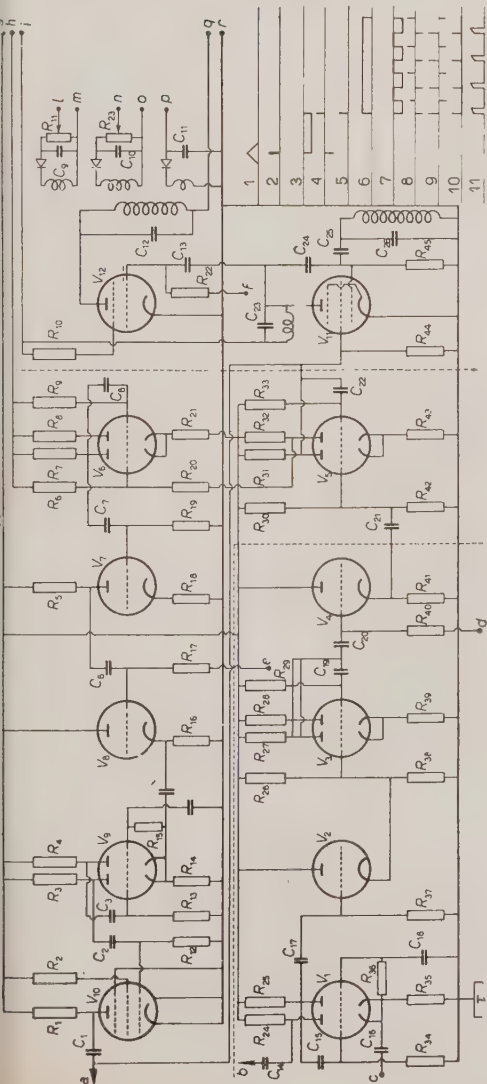


Fig. 4 - Schema elettrico (semplificato) (*) del: Ritardatore (V. 1-2-3-4). Generatore (V. 5-6-7-8-9-10) e Separatore (V. 11-12) (disposti fra loro dalle linee tratteggiate). I condensatori variabili del generatore sono costituiti da gruppi di condensatori fissi commutabili. Le induttanze del separatore sono calcolate per una frequenza di circa 6 MHz.

Valore dei componenti e spiegazione dei segni di riferimento.

R 1	40 kΩ	R 18	2 kΩ	C 6	0,05 μF	C 23	5 μF semiffisso
2	80 kΩ	19	30 kΩ	7	2,000 μF	24	10 μF semiffisso
3	5 kΩ	20	10 kΩ	8	0,003-2 μF variabile	25	150 μF
4	25 kΩ	21	150 kΩ	9	50 μF	26	50 μF semiffisso
5	25 kΩ	22	10 kΩ	10	50 μF		
6	250 kΩ	23	10 kΩ	11	50 μF	V 1	6sn7
7	20 kΩ	24	15 kΩ	12	50 μF	2	6l5
8	10 kΩ	25	20 kΩ	13	100 μF semiffisso	3	6sn7
9	10 kΩ	26	250 kΩ	14	1,500 μF	4	6l5
10	20 kΩ	27	20 kΩ	15	2,000 μF	5	6sn7
11	10 kΩ	28	10 kΩ	16	0,05 μF	6	6sn7
12	10 kΩ	29	1 MΩ reostato	17	1,500 μF	7	1/2 6sn7
13	200 kΩ	30	250 kΩ	18	2,000 μF	8	1/2 6sn7
14	5 kΩ	31	20 kΩ	19	0,003-4 μF variabile	9	6sn7
15	1 MΩ reostato	32	10 kΩ	20	2,000 μF	10	6ac7
16	10 kΩ	33	1 MΩ reostato	21	0,5 μF variab.	11	6x6gt
17	250 kΩ	34	200 kΩ	22	0,006-4 μF variabile	12	807

(*) Sono stati omessi i disaccoppiamenti anodici, filtri ed altri dispositivi per l'eliminazione dei disturbi.

NOTA. - La forma d'onda 1 rappresenta il potenziale fotografico amplificato di comando. Tutte le pressioni di onda sono state calcolate e rappresentate colla stessa scala sull'asse dei tempi, e considerando come istante iniziale di funzionamento del generatore quello in cui l'ampiezza dell'onda 1 è massima.

a al canale di numerazione decimale
b al canale di numerazione diretta
c entrata dei segnali biologici amplificati
d negativo di griglia I
e negativo di griglia II
f negativo di griglia III
g positivo 300 V stabilizzati
h positivo 600 V (g + 300) stabilizzati
i positivo 950 V
l, m uscita stimoli I
n, o uscita stimoli II
p uscita stimoli III
q positivo 400 V
r negativo generale, positivo degli alimentatori di griglia, e terra
s forme d'onda: all'entrata di V1 = 1, V2 = 2, C20 = 3, V4 = 4, V5 = 5, V6 = 6, V7 = 7, C7 = 8, V8 = 9, V9 = 10, V10 = 11, V11 = 12, V12 = 13; all'uscita stimoli I, II e di controllo = 14.

segnale rettangolare negativo, esso comanda, attraverso V4, il successivo MV. La durata dei ritardi è regolabile continuamente da $0,5 \cdot 10^{-3}$ s. fino a 2 s.

V4 trasferitore catodico.

C) V5 circuito della durata di stimolazione. Questo MV monostabile determina, colla durata del suo ciclo, la durata complessiva di ogni treno d'impulsi (variabile con continuità da $1,5 \cdot 10^{-3}$ s fino a 4 s).

V6 circuito di cadenza. Per tutta la durata dell'impulso di V5, questo circuito oscilla liberamente. Ciò è ottenuto nel seguente modo:

a) l'alimentazione anodica di V6 è posta in serie a quella generale;

b) il catodo di V6 è collegato al positivo della tensione anodica generale;

c) il ritorno di griglia di una sezione di V6 è collegato alla placca della sezione normalmente conduttrice di V5. Appena V5 inizia il ciclo, tale placca sale verso il potenziale di alimentazione massimo, cioè verso il potenziale 0 dell'alimentazione di V6. La forte polarizzazione negativa applicata alla griglia di V6 è quindi soppressa ed il MV si sblocca. La cadenza degli impulsi prodotti da questo stadio può essere variata da 1000 imp/s a 1 imp/s.

V7 stadio invertitore.

V8 trasferitore catodico.

V9 circuito delle durate di ogni singolo impulso. Questo MV è analogo a quello usato come stadio di entrata (più adatto per durate brevi); esso produce segnali rettangolari, di durata variabile da 10^{-5} a 10^{-2} s, con la cadenza degli impulsi di comando (cioè con la cadenza di V6).

V10 stadio amplificatore di uscita. Inverte di segno, rendendoli positivi, i treni d'impulsi provenienti da V9; inoltre, trattandosi di valvola a taglio rapido, ne migliora la forma. La tensione di picco all'uscita è di 150 V.

Generatore a radiofrequenza (fig. 1-D). — Questa parte dell'apparecchio ha lo scopo di ridurre al minimo le interferenze dovute alla diffusione delle correnti di stimolazione nel preparato.

Supponiamo che uno dei poli di stimolazione sia in collegamento colla terra e che (come quasi sempre, per necessità pratiche, è impossibile evitare), anche il preparato sia in contatto con la terra. All'atto della stimolazione si avrà, per un fenomeno inevitabile nei conduttori di volume, una diffusione di corrente (linee tratteggiate di fig. 5) che porterà alla formazione di differenze di potenziale fra gli elettrodi di registrazione.

In pratica le interferenze, o « artefatti », di questo tipo, possono essere ridotte notevolmente allontanando gli elettrodi *R* da quelli *S* e valendosi di amplificatori differenziali per la registrazione.

Artefatti molto più intensi e difficilmente eliminabili possono, invece, essere causati dalla corrente che fluisce (linee punteggiate di fig. 5) verso il punto, od i punti, in cui il preparato è messo a terra.

Per evitare di collegare a terra uno dei poli di stimolazione e, di conseguenza, lo stabilirsi di questa corrente, sono stati escogitati diversi metodi. Quello del « passaggio in radiofrequenza », si è rivelato il più efficace.

Esso è già stato usato da altri Autori (^{4,5}), in versioni diverse dalla nostra per la mancanza dello stadio finale e per il regime non impulsivo dell'oscillatore.

Nel nostro caso, la valvola oscillatrice (V11), funziona solo quando gli impulsi di tensione, che provengono dal circuito *C* di fig. 1, sono applicati alla sua griglia schermo. Le costanti di griglia sono scelte in modo da permettere un rapido innesco e disinnesco delle oscillazioni. Il circuito anodico di V12 (amplificatrice in classe *C* a polarizzazione mista) ha un *Q* non troppo elevato, onde favorire un rapido smorzamento delle oscillazioni al termine dell'impulso. (Si considerano « brevi », tempi dell'ordine del microsecondo).

Facendo un compromesso fra varie esigenze, è stata scelta una frequenza di 6 MHz. Il trasformatore in a.f. ha tre secondari indipendenti. Un opportuno sistema di rivelatori al germanio e di filtri permette di ottenere, all'uscita dei tre secondari, degli impulsi rettangolari di tensione in tutto simili a quelli generati dall'impulsatore.

L'ampiezza massima ottenibile da ogni secondario è di circa 50 V ed è sensibilmente indipendente dalle condizioni di carico degli altri avvolgimenti. Due di questi possono venire usati per la stimolazione, mentre il terzo, di controllo, è collegato con un oscilloscopio incorporato nel complesso. L'ampiezza di stimolazione può venire progressivamente ridotta, fino a circa 1 mV, mediante un attenuatore calibrato (non rappresentato nello schema elettrico) a impedenza costante di 500 Ω .

Circuiti di numerazione. — Il primo registra (fig. 1-*E*₁), come detto, gli impulsi di comando; il secondo (fig. 1-*E*₂), preceduto da una catena di otto demoltiplicatori binari, registra gli impulsi generati prelevandoli all'uscita dell'impulsatore. Il circuito dei demoltiplicatori è del tipo suggerito da SANDS (⁶).

Del complesso fa parte, inoltre, un oscilloscopio nel cui circuito amplificatore è incorporato un miscelatore che permette la visione contemporanea degli impulsi provenienti dal biogeneratore (uscita di *A*, fig. 1) e di quelli che vengono riapplicati sul biogeneratore stesso (uscita di *D*, fig. 1). L'amplificazione dei due canali di miscelazione è regolabile indipendentemente, in modo che il rapporto fra le ampiezze degli impulsi che giungono al tubo attraverso di essi non sia necessariamente uguale a quello realmente esistente all'entrata ed all'uscita del complesso. Ciò per facilitare l'osservazione, sullo schermo del tubo, delle relazioni temporali fra gli impulsi uscenti ed entranti.

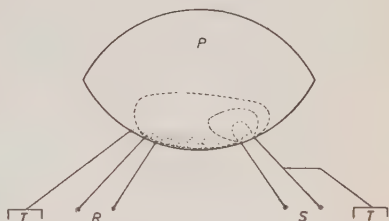


Fig. 5. — Diffusione di corrente in un preparato biologico. *P* = preparato; *R* = elettrodi di registrazione; *S* = elettrodi di stimolazione; *T* = terre.

(⁴) O. SCHMITT e D. DUBBERT: *Rev. Sci. Inst.*, **20**, 170 (1949).

(⁵) O. WYSS: *Helv. Physiol. Acta*, **7**, 437 (1949).

(⁶) W. C. ELMORE e M. SANDS: *Electronics*, National Nuclear energy series, Div. 5, vol. I (New York, 1949).

Nell'uso del complesso, va naturalmente tenuto conto delle « incompatibilità aritmetiche » fra i vari MV e dei loro « tempi morti ».

Lo scopo per cui questo complesso è stato costruito e le esperienze con esso effettuate, saranno oggetto di ulteriori lavori.

Gli autori desiderano ringraziare il prof. G. MORUZZI, Direttore dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Pisa, per le numerose ed utili discussioni avute su argomenti relativi al presente lavoro.

SUMMARY

The description is given of an electronic stimulator, triggered by bioelectric potentials, and designed in order to reproduce feed-back mechanisms, normally connected with the activity of the central nervous system. At each triggering pulse, the stimulator yields a series of rectangular pulses which are variable, within wide limits, in number, amplitude and width. A variable delay (from 0 to 2000 ms) may be also introduced, with respect to the bioelectric signal. An example of application is shown, and some circuits are described in detail.

Camera di Wilson in campo magnetico.

M. CRESTI, A. LORIA e G. ZAGO

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 4 Aprile 1953)

Riassunto. — Si descrivono la camera di Wilson in campo magnetico di 7000 gauss che è in attività nel Laboratorio della Marmolada a 2000 m e gli strumenti sussidiari destinati alla misura dei momenti di particelle di elevata energia.

Nel Laboratorio della Marmolada (2000 m), dipendente da questa Sezione dell'I.N.F.N., viene attualmente usata per ricerche sulle particelle elementari della radiazione cosmica una camera di Wilson che funziona nel campo di circa 7000 gauss fornito da un elettromagnete da 25 kW ⁽¹⁾.

Poichè la tecnica della misura diretta di momenti elevati non è stata ancora affrontata in Italia, abbiamo pensato conveniente descrivere la camera e gli strumenti impiegati nelle misure.

La camera.

La camera (fig. 1) è formata da un cilindro di vetro (1), del diametro interno di 25 cm, chiuso da una parte con una lastra di vetro temprato (2) di 6 mm di spessore e dall'altra con un diaframma di gomma (3). Il diaframma è schiacciato contro una piastra di ottone fittamente forata (4), da aria compressa immessa nel retrocamera attraverso un condotto (5). Ad un cm dalla piastra si trova una reticella di ottone sulla quale è teso del velluto nero a larga trama (6) che funge da sfondo fotografico. Il riempimento si fa attraverso un forellino praticato nel cilindro di vetro.

Lo spostamento del diaframma è limitato da un disco forato (7), il quale poggia su una piastra di ferro (8) solidale con un manicotto (9), attraverso

⁽¹⁾ G. SOMEDA: *L'Elettrotecnica*, **24**, 470 (1937).

il cui foro (10), di 5 cm di diametro, avviene l'espansione rapida dell'aria compressa del retrocamera.

Il rapporto di espansione si regola spostando la piastra di ferro (8) con rotazione del manicotto attorno al suo asse: il manicotto si ruota mediante un tubo di ferro (11), lungo 55 cm e di diametro esterno 10 cm, il quale è inca-

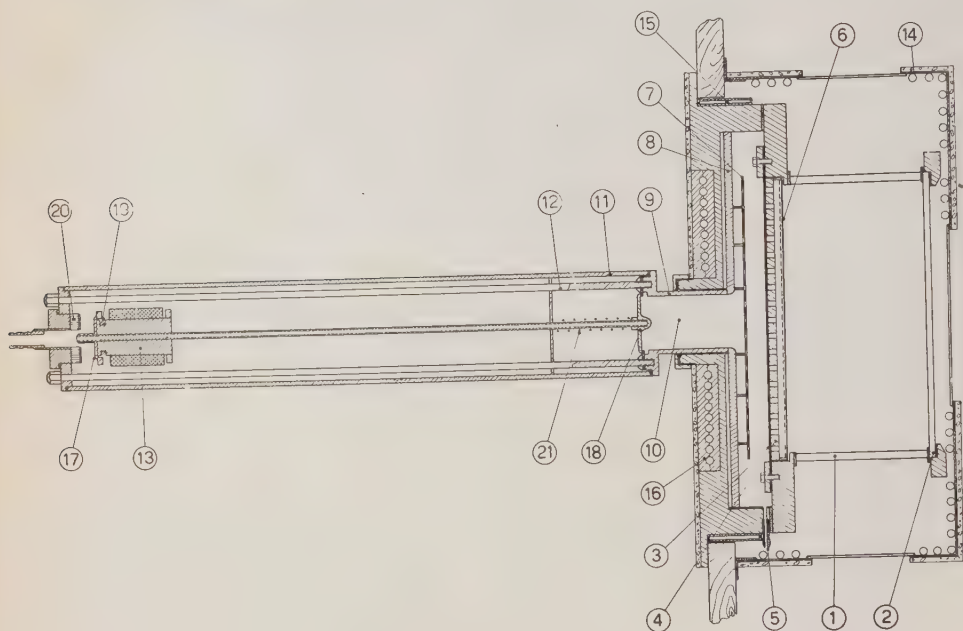


Fig. 1. - Sezione della camera.

strato nel manicotto ed è ad esso trattenuto mediante viti a bacchetta (12). Il tubo di ferro sporge dal foro di 10 cm di diametro esistente nell'espansione mobile del magnete ed è quindi direttamente accessibile. In esso viene fatto il vuoto per rendere più veloce l'espansione rapida; alle sue pareti interne è fissata la valvola (13) che la comanda.

La camera è circondata da un cassone cilindrico di rame (14) alle cui pareti interne è saldato, avvolto in più giri, un tubo, pure di rame, nel quale circola acqua che attraversa poi una cravatta cava (15) stretta ad abbracciare il corpo della camera ed un sistema di scanalature praticate in una piastra di ferro (16), premuta contro il fondo della stessa.

Per limitare gli scambi di calore con l'aria esterna e col magnete sia il cassone che il piastrone di fondo sono ricoperti esternamente da sughero.

L'acqua che ha percorso i sistemi termostatici descritti viene da ultimo usata per raffreddare l'aria compressa immessa nel retrocamera durante le espansioni lente; essa proviene da un pozzo alimentato dalle acque di fusione

del ghiacciaio della Marmolada: la sua temperatura, di circa 4 °C, ha una deriva annua dell'ordine del grado.

La valvola elettromagnetica che comanda l'espansione è del tipo descritto da F. H. CHU e G. E. VALLEY ⁽²⁾.

L'elettromagnete (13), agendo sull'ancoretta (17), spinge, tramite un tubo

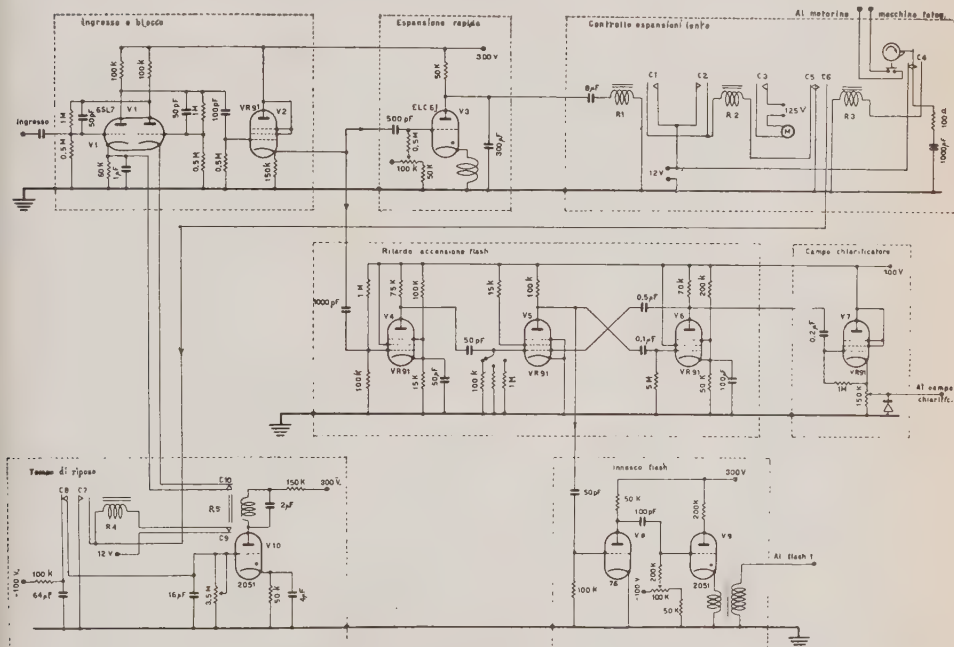


Fig. 2. - Circuito di controllo della camera.

di lega leggera, la testa a fungo di alluminio (18) contro una guarnizione di gomma applicata al manicotto, chiudendo il condotto di espansione. Questa viene ottenuta smagnetizzando il nucleo con un forte impulso di corrente nell'avvolgimento supplementare (19) formato da poche spire di grosso filo di rame.

Il cuscinetto di gommapiuma (20) frena l'equipaggio mobile della valvola magnetica e la leggera molla (21) lo riporta nella posizione di partenza.

Dispositivi di controllo.

Uno schema dei dispositivi elettronici di controllo è dato in fig. 2.

Il circuito d'ingresso e blocco, realizzato con il doppio triodo V_1 è un

⁽²⁾ F. H. CHU e G. E. VALLEY: *Rev. Scient. Instr.*, **19**, 496 (1948).

tatto *C* chiude la valvola 1. Se il relè non funziona, l'aumento di pressione spinge il mercurio nel serbatoio *S* e l'aria compressa si scarica all'esterno attraverso il tubo manometrico vuotato. Spostando verticalmente il serbatoio *S* si può regolare l'altezza del mercurio nel manometro e quindi la pressione nel retrocamera.

Ottica e misura dei momenti.

La camera è illuminata, attraverso due finestre rettangolari di plexiglas aperte nel cassone termostatico, da due flash Siemens SF4; il fascio parallelo è ottenuto con due sistemi ottici, di lunghezza focale 8 cm, costituiti ciascuno da due lenti cilindriche piano-convesse di plexiglas. Attraverso ogni flash si scarica una capacità di 200 μ F alla tensione di 2000 volt.

Il cassone termostatico ha anche una finestra frontale circolare di sottile vetro ottico attraverso cui si osserva direttamente e si fotografa.

Due gruppi di cinque lampadine ad incandescenza da 75 watt, che possono venir collocate al posto dei flash, forniscono l'illuminazione per l'osservazione della camera durante il periodo di messa a punto.

La macchina fotografica, stereoscopica, si trova nel foro di 10 cm di diametro, opportunamente svasato, esistente nell'espansione fissa del magnete: essa è fornita di due obiettivi Leitz Hektor ($f=28$ mm, 1/6,3) posti a 40 mm di distanza uno dall'altro, a 28 cm dal centro della camera, e tenuti alla massima apertura. La zona illuminata, profonda 8 cm, è tutta soddisfacentemente a fuoco. L'avanzamento della pellicola, Ferrania X3V Schermofoto, è automatico e comandato da un motorino.

Per la ricostruzione spaziale degli eventi viene usato il proiettore di fig. 4.

I filamenti di due lampade da 75 watt sono posti nei fuochi dei condensatori (1). I fasci di luce parallela attraversano la vaschetta (2), percorsa da acqua corrente per refrigerare lo strumento ed assorbire i raggi infrarossi che danneggerebbero il film, e vengono quindi fatti riconvergere dai condensatori (3) nelle pupille degli obiettivi. Il blocco portobiettivi (4) è lo stesso che viene usato nella fotografia; la pellicola (5) viene tenuta in posizione da una lastrina di vetro (6) spinta da molle. Per apprezzare con maggior precisione la coincidenza delle immagini di due punti omologhi, un diaframma forato ruota davanti ai due obiettivi, coprendoli alternativamente con una frequenza di circa 5 volte al secondo; lievi scostamenti dello schermo dalla posizione corretta fanno apparire l'immagine tremolante: con questo artificio la posizione di un punto nello spazio può essere determinata a meno di 1 mm.

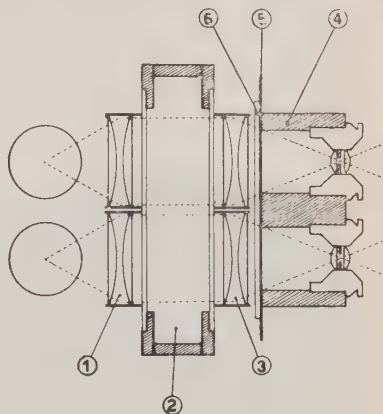


Fig. 4. — Proiettore per la ricostruzione spaziale degli eventi.

Il campo magnetico in cui la camera è immersa ha un'intensità di 7000 gauss. Il momento delle particelle ionizzanti che attraversano la camera è espresso dalla nota formula:

$$p = 300Hr \quad (p \text{ in eV/c, } H \text{ in gauss, } r \text{ in cm}).$$

Nel nostro caso si ha:

$$p = 2 \cdot 10^6 r.$$

All'intervallo dei momenti fra 10^8 e 10^{10} eV/c corrispondono raggi di curvatura da 0,5 a 50 m: essendo l'ingrandimento medio 1/10, i corrispondenti raggi sul film sono compresi fra 5 cm e 5 m.

I metodi da noi impiegati per la misura delle curvature sono due.

Metodo del microscopio: usato per la prima volta da ANDERSON ⁽³⁾, consiste nel rilevare con un microscopio le coordinate di punti della traccia opportunamente intervallati: la curvatura viene da esse dedotta per via grafica od analitica.

Metodo del compensatore di Blackett: sfrutta la proprietà del prisma di trasformare l'immagine di un segmento proiettato attraverso di esso in un

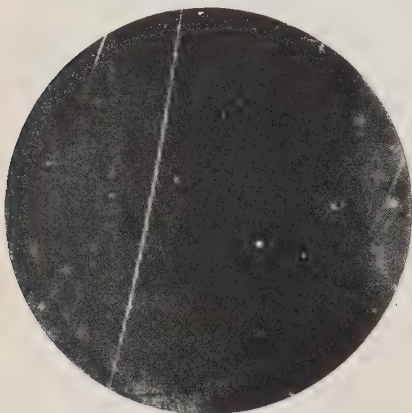


Fig. 5. - Protone di momento $3,1 \cdot 10^8$ eV/c. Campo 7000 gauss.

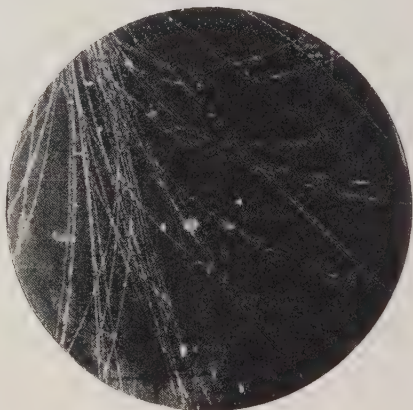


Fig. 6. - Sciame elettronico locale. Campo 7000 gauss.

arco di cerchio la cui curvatura è funzione dell'inclinazione del segmento rispetto allo spigolo del prisma. Abbiamo costruito un compensatore, analogo al primo descritto da WILSON ⁽⁴⁾, usando come obiettivo un Ducati Vitor, ($f = 35$ mm, $1/3,5$), ed un prisma comune ($\Delta_m = 9^\circ$), in luce gialla. La taratura è stata fatta con archi di cerchio di raggio noto, da 0,5 a 2,5 m,

⁽³⁾ C. D. ANDERSON: *Phys. Rev.*, **44**, 406 (1933).

⁽⁴⁾ J. G. WILSON: *The Principles of Cloud Chamber Technique* (Cambridge, 1951), pag. 101.

tracciati con uno speciale compasso su lastre fotografiche. La funzione di taratura dello strumento è $C = 4,45 \sin \vartheta \text{ m}^{-1}$: esso può essere usato fino a $C = 4 \text{ m}^{-1}$, alla quale curvatura corrisponde un momento di $5 \cdot 10^8 \text{ eV/c}$. La misura di momenti minori viene eseguita col metodo del microscopio.

Come osservano ARMENTEROS e coll. ⁽⁵⁾, la minima curvatura rivelabile di una traccia in una fotografia autocomandata si può considerare funzione della sola lunghezza della traccia se sono invariate l'illuminazione, la ionizzazione specifica e le condizioni in cui avviene la condensazione.

Anche noi abbiamo trovato che per immagini di buona qualità relative a tracce di minima ionizzazione il limite inferiore nella misura della curvatura è posto da distorsioni dovute a moti convettivi. Notiamo che elemento quasi determinante della bontà di una traccia è la sua finezza e che la larghezza delle nostre tracce reali, di circa 500μ , è molto soddisfacente: infatti, applicando la nota formula di Blackett fra larghezza e tempo di espansione, si ottiene, per camere considerate rapidissime (vedi J. G. WILSON, op. cit. pag. 68), una larghezza dello stesso ordine. La curvatura probabile dovuta ai moti convettivi è stata determinata con tracce di mesoni μ lunghe almeno 10 cm, fotografate con campo zero. Essa è risultata $0,3 \text{ m}^{-1}$, valore che corrisponde ad un momento massimo rivelabile di $6 \cdot 10^9 \text{ eV/c}$, con un ingrandimento medio eguale



Fig. 7. — Particella V carica associata a sciame locale di particelle a ionizzazione minima. Campo zero.

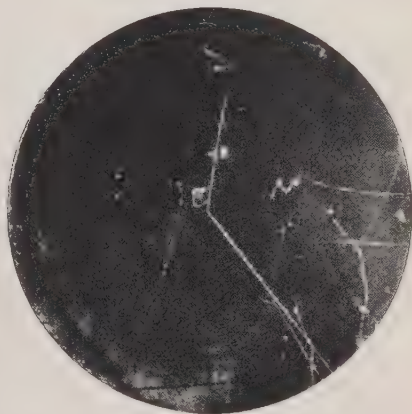


Fig. 8. — Particella V carica con entrambi i rami fortemente ionizzanti. Campo zero.

ad 1/10 ed un campo di 7000 gauss. Nelle figure da 5 a 8 sono riprodotte alcune fotografie ottenute durante la fase di studio della camera ed in una ricerca da poco iniziata sulle particelle V.

⁽⁵⁾ R. ARMENTEROS, K. H. BARKER, C. C. BUTLER e A. CACHON: *Phil. Mag.*, **42**, 1113 (1951).

Ringraziamo il Prof. A. ROSTAGNI per il costante interessamento con cui ha seguito il nostro lavoro ed i tecnici di questo Istituto A. DOZZA e B. BALLIN che hanno costruito la camera e gli strumenti sussidiari.

Esprimiamo, infine, la nostra viva riconoscenza alla Società Adriatica di Elettricità per l'essenziale appoggio accordatoci

SUMMARY

A Wilson cloud chamber with a magnetic field of 7000 gauss is now operating at the Laboratorio della Marmolada (2000 m) of the Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Padova. A description is given of the cloud chamber and its subsidiary equipment for measuring the momentum of high-energy particles.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

A Covariant Non-Adiabatic Equation for Nucleon-Pion Scattering.

S. FUBINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 17 Aprile 1953)

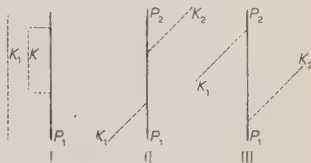
In a previous paper ⁽¹⁾ the Tamm-Dancoff non-adiabatic method ⁽²⁾ has been applied to the study of the nucleon-pion scattering. There we encountered divergence difficulties arising from states with one nucleon and no pion present. So we have not been able to deal with the isotopic spin state $T = 1/2$. The Tamm-Dancoff method stresses these difficulties since positive and negative energy states are not treated on equal footing.

In this letter we propose a covariant integral equation for the Feynman kernel of the nucleon-pion scattering. This equation, which has a formal analogy with that one of BETHE and SALPETER ⁽³⁾ for the proton-neutron system, takes into account all Feynman graphs with a single nucleon line and no more than two pions at one time.

The approximation of this equation is almost the same, although not completely equivalent to the Tamm-Dancoff approximation ⁽⁴⁾. In fact the Tamm-Dancoff kernel connects only states with positive nucleon energy, while the Bethe-Salpeter kernel connects positive and negative energy states.

Starting from our integral equation and using Dyson's procedure ⁽⁵⁾, the divergent parts can be isolated and ruled out by means of renormalization of the nucleon mass and of the coupling constant.

Let $K(p_1 k_1, p_0 k_0)$ be the Feynman kernel for the nucleon-pion scattering, p_0, k_0 the four-dimensional momenta of the initial nucleon and pion respectively, p_1, k_1 the final ones. All the Feynman graphs with a single nucleon line and no more than two pions at one time can be obtained combining the following three fundamental diagrams:



⁽¹⁾ S. FUBINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 564 (1953).

⁽²⁾ I. TAMM: *Journ. Phys. (USSR)*, **9**, 449 (1945); S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).

⁽³⁾ E. SALPETER and H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **84**, 1232 (1951); M. GELL-MANN and F. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951).

⁽⁴⁾ We learned from Prof. PEIERLS that Dr. MIYAZIMA has recently studied the connection between the Tamm-Dancoff and the Bethe-Salpeter methods for this problem.

⁽⁵⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949) referred to as D I, D II; P. T. MATTHEWS: *Phil. Mag.*, **41**, 185 (1950).

Therefore the integral equation for the kernel is:

$$(1) \quad [1 - S_F(p_1) \Sigma_I(p_1)] K(p_1 k_1, k_0 p_0) = \delta(p_1 - p_0) \delta(k_1 - k_0) D_F(k_0) S_F(p_0) + \\ + D_F(k_1) S_F(p_1) \int [G_{II}(p_1 k_1, p_2 k_2) + G_{III}(p_1 k_1, p_2 k_2)] \cdot \\ \cdot \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) K(p_2 k_2, p_0 k_0) d^4 p_2 d^4 k_2,$$

where:

$$(2a) \quad \Sigma_I(p_1) = g^2 \int D_F(k) \gamma^5 S_F(p_1 - k) \gamma^5 d^4 k,$$

$$(2b) \quad G_{II}(p_1 k_1, p_2 k_2) = g^2 \gamma^5 S_F(p_1 + k_1) \gamma^5,$$

$$(2c) \quad G_{III}(p_1 k_1, p_2 k_2) = g^2 \gamma^5 S_F(p_1 - k_2) \gamma^5,$$

the functions S_F and D_F are given in D I, II.

We separate and remove the infinite parts from the linearly divergent operator $\Sigma_I(p_1)$ using the same procedure as in D II. Equation (2) becomes:

$$(3) \quad K(p_1 k_1, p_0 k_0) = \delta(p_1 - p_0) \delta(k_1 - k_0) D_F(k_0) S'_F(p_0) + D_F(k_1) S'_F(p_1) \cdot \\ \cdot \int [G_{II}(p_1 k_1, p_2 k_2) + G_{III}(p_1 k_1, p_2 k_2)] \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) K(p_2 k_2, p_0 k_0) d^4 p_2 d^4 k_2,$$

$$(4) \quad S'_F(p) = \left[1 - \frac{1}{2\pi} S_I(p) \right]^{-1} S_F(p).$$

Equation (3) may be written in the form:

$$(5) \quad K(p_1 k_1, p_0 k_0) = \delta(p_1 - p_0) \delta(k_1 - k_0) D_F(k_0) S'_F(p_0) + D_F(k_1) S'_F(p_1) \cdot \\ \cdot \left[\gamma^5 \chi(p_1 + k_1, p_0 k_0) + \int G_{III}(p_1 k_1, p_2 k_2) \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) K(p_2 k_2, p_0 k_0) d^4 p_2 d^4 k_2 \right],$$

where:

$$(6) \quad \chi(p_3, p_0 k_0) = g^2 S_F(p_3) \gamma^5 \int \delta(p_3 - p_2 - k_2) K(p_2 k_2, p_0 k_0) d^4 p_2 d^4 k_2.$$

Let $R(p_1 k_1, p_0 k_0)$ be the resolving kernel of $G_{III}(p_1 k_1, p_2 k_2)$, obeying the following

equation (6):

$$(7) \quad R(p_1 k_1, p_2 k_2) = G_{\text{III}}(p_1 k_1, p_2 k_2) + \int G_{\text{III}}(p_1 k_1, p_3 k_3) D_F(k_3) S'_F(p_3) \cdot \\ \cdot R(p_3 k_3, p_2 k_2) \delta(p_2 + k_2 - p_3 - k_3) d^4 p_3 d^4 k_3.$$

From (5) and (7) it follows:

$$(8) \quad K(p_1 k_1, p_0 k_0) = D_F(k_1) S'_F(p_1) \cdot \\ \cdot [\delta(p_1 - p_0) \delta(k_1 - k_0) + R(p_1 k_1, p_0 k_0) \delta(p_1 + k_1 - p_0 - k_0) D_F(k_0) S'_F(p_0)] + \\ + D_F(k_1) S'_F(p_1) [1 + A^{(1)}(p_1 k_1)] \gamma^5 \chi(p_1 + k_1, p_0 k_0),$$

$$(9) \quad A^{(1)}(p_1 k_1) = \int R(p_1 k_1, p_2 k_2) \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) D_F(k_2) S'_F(p_2) d^4 p_2 d^4 k_2,$$

$A^{(1)}(p_1 k_1)$ diverges logarithmically. It may be decomposed into a divergent constant and a convergent part:

$$(10) \quad A^{(1)}(p_1 k_1) = A_{\text{div}}^{(1)} + A_c^{(1)}(p_1 k_1);$$

$A_{\text{div}}^{(1)}$ is removed by means of renormalization of the coupling constant.

Substituting in (6) the value of $K(p_1 k_1, p_0 k_0)$ given by (8), we obtain an equation for $\chi(p_1 + k_1, p_0 k_0)$.

$$(11) \quad [1 - S_F(p_3) \Sigma_{\text{II}}(p_3)] \chi(p_3, p_0 k_0) = \\ = g^2 S_F(p_3) \gamma^5 [1 + A^{(2)}(p_0 k_0)] \delta(p_3 - p_0 - k_0) D_F(k_0) S'_F(p_0),$$

where:

$$(12) \quad A^{(2)}(p_0 k_0) = \int D_F(k_1) S'_F(p_1) \delta(p_1 + k_1 - p_0 - k_0) R(p_1 k_1, p_0 k_0) d^4 p_1 d^4 k_1,$$

$$(13) \quad \Sigma_{\text{II}}(p_3) = g^2 \int \gamma^5 D_F(k_1) S'_F(p_1) \gamma^5 [1 + A_c^{(1)}(p_1 k_1)] \delta(p_3 - p_1 - k_1) d^4 p_1 d^4 k_1;$$

$A^{(2)}(p_0 k_0)$ diverges logarithmically. The separation and removal of the divergent part can be achieved in the same way as for $A^{(1)}(p_0 k_0)$. We apply to $\Sigma_{\text{II}}(p_3)$ (which diverges linearly) the standard treatment for self energy graphs; so we obtain for $\chi(p_3, p_0 k_0)$ the convergent expression:

$$(14) \quad \chi(p_3, p_0 k_0) = g^2 \frac{S_F(p_3) \gamma^5 [1 + A_c^{(2)}(p_0 k_0)] D_F(k_0) S'_F(p_0) \delta(p_3 - p_0 - k_0)}{1 - \Sigma_{\text{IIc}}(p_3)}.$$

(*) This resolving kernel does exist since $G_{\text{III}}(p_1 k_1; p_2 k_2)$ does not involve divergence difficulties. If the coupling constant is great it may be evaluated with some method different from the perturbation one.

By substituting (14) in (8), $K(p_1 k_1, p_0 k_0)$ is obtained in the form:

$$(15) \quad K(p_1 k_1, p_0 k_0) = D_F(k_0) S'_F(p_0) \delta(p_1 - p_0) \delta(k_1 - k_0) + \delta(p_1 + k_1 - p_0 - k_0) D_F(k_1) S'_F(p_1) \cdot \\ \cdot \left[R(p_1 k_1, p_0 k_0) + g^2 \frac{[1 + A_c^{(1)}(p_1 k_1)] \gamma^5 S_F(p_0 + k_0) \gamma^5 [1 + A_c^{(2)}(p_0 k_0)]}{1 - (1/2\pi) S_{IIc}(p_0 + k_0)} \right] D_F(k_0) S'_F(p_0)$$

in which all divergences are ruled out.

Work is in progress to evaluate with this method the nucleon-pion scattering cross section for $T = 1/2$ and the photoproduction of pions.

The author is grateful to Prof. G. WATAGHIN for his very kind interest and Dr. M. CINI for very useful discussions and criticism. He is also indebted to the Consiglio Nazionale delle Ricerche for having supported this research.

Eventi anelastici da protoni di alta energia in emulsioni nucleari (*).

M. LADU

Istituto di Fisica dell'Università - Cagliari

(ricevuto il 17 Aprile 1953)

Su lastre Ilford G5 da 300 μ di spessore (**) esposte a un fascio di protoni di 240 MeV del ciclotrone di Rochester, si è fatto un esame per traccia protonica, esame al quale si è brevemente accennato in una nota precedente (¹).

Sono stati seguiti 5027 cm di traccia. Le tracce, solcanti una gran parte della lastra nel senso della larghezza, erano approssimativamente parallele.

L'esame è stato fatto con un ingrandimento di circa 600 diametri, seguendo sistematicamente tracce di protoni singoli, scelte verso il bordo principale della lastra; nella scelta si badava a che le tracce fossero sufficientemente lontane dal vetro e dalla superficie dell'emulsione.

Quando l'analisi di un evento lo richiedeva, si è proceduto all'esame in immersione (1300 ingrandimenti).

L'errore nella misura della lunghezza effettiva della traccia è risultato del 3 % circa.

Sono stati osservati complessivamente 190 eventi così suddivisi: 109 stelle con numero di rami compreso fra 1 e 7 (non sono stati contati come rami, nè il protone incidente, nè tracce di lunghezza inferiore a 5 μ), 3 stoppings, 77 scatterings di 4° e più e un urto p-p.

Gli eventi sono stati fenomenologicamente classificati in modo analogo a quello di BERNARDINI, BOTH e LINDENBAUM (²).

Fra gli eventi anelastici, com'è noto, non sono da annoverare gli scatterings dovuti a mutua repulsione coulombiana e a diffrazione.

Procedendo, per il calcolo del cammino libero medio anelastico secondo il metodo seguito da PERRY (³), con l'uso del modello ottico nucleare (^{4,5}) il nu-

(*) I dati sperimentali sono stati elaborati durante una mia permanenza presso l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Milano. Per la cordiale ospitalità sono vivamente grato ai Proff. P. CALDIROLA e G. P. S. OCCHIALINI.

(**) Le lastre mi sono state gentilmente fornite dal Prof. R. E. MARSHAK.

(¹) M. LADU: *Nuovo Cimento*, **10**, 108 (1953).

(²) G. BERNARDINI, E. T. BOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **85**, 826 (1952).

(³) A. M. PERRY: *Phys. Rev.*, **85**, 497 (1952).

(⁴) R. SERBER: *Phys. Rev.*, **72**, 1114 (1947).

(⁵) S. FERNBACH, R. SERBER e T. B. TAYLOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1352 (1949).

mero degli scatterings anelastici diventa 33 (*); si ha così

$$\lambda_{an} = \frac{5027}{145} = 34,7 \pm_{3,7}^{4,2}$$

Questo risultato è in buon accordo con quello trovato da PERRY per protoni della stessa energia ⁽³⁾; confrontato con valori ottenuti a energia più elevata ⁽²⁾ e meno elevata ⁽⁶⁾ sembrerebbe indicare che la trasparenza nucleare aumenta con l'aumentare dell'energia.

Il procedimento seguito per ricavare le sezioni d'urto degli elementi dell'emulsione, è in tutto analogo a quello seguito da PERRY ⁽³⁾. Basato sul modello ottico, esso presuppone che il cammino libero medio nella materia nucleare λ_0 , sia lo stesso per tutti i nuclei e dipenda solo dall'energia dei protoni incidenti, nel qual caso si dimostra che il rapporto fra sezione d'urto σ e sezione geometrica σ_0 , è data da

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{1 - (1 + 2KR) \exp[-2KR]}{2(KR)^2},$$

dove $K = \lambda_0^{-1}$ e $R = r_0 A^{1/3}$ è il raggio nucleare con $r_0 = 1,37 \cdot 10^{-13}$ cm.

La sezione d'urto degli elementi dell'emulsione è data in Tab. I, dove nell'ultima colonna è data la percentuale della sezione d'urto totale per i singoli elementi e per la media degli elementi pesanti (Ag, Br) e degli elementi leggeri (O, N, C).

(*) Assumendo che il limite degli scatterings elastici per diffrazione sia a circa 10° ⁽²⁾ e poiché la sezione d'urto per scattering coulombiano maggiore di 10° è trascurabile a confronto della sezione geometrica degli elementi dell'emulsione, si ha che dei 77 scatterings osservati, solo 25 sono anelastici. Con ciò si avrebbe

$$\lambda_{an} = \frac{5027}{137} = 36,7 \pm_{4,0}^{4,7}$$

(*) C. F. LEES, G. C. MORRISON, H. MUIRHEAD e G. V. ROSSER: *Phil. Mag.*, **44**, 304 (1953).

TABELLA I. — Sezione d'urto anelastica per protoni di 240 MeV.

Elementi	$\sigma \cdot 10^{-24}$	% sezione d'urto totale
Ag	$1,20 \pm_{0,10}^{0,10}$	41,7
Br	$0,97 \pm_{0,09}^{0,10}$	33,7
O	$0,26 \pm_{0,04}^{0,07}$	9,0
N	$0,24 \pm_{0,04}^{0,06}$	8,3
C	$0,21 \pm_{0,03}^{0,05}$	7,3

} 75,4
} 24,6

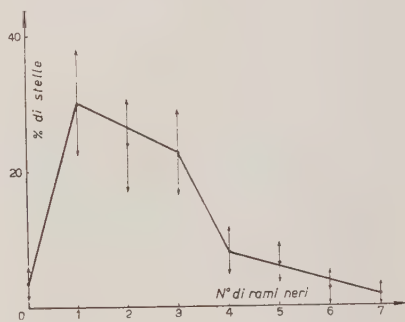


Fig. 1.

In base a questi risultati è da attendersi che circa il 75% degli eventi anelastici avvengano in nuclei di Ag e Br e solo il 25% circa in gelatina.

Il numero medio di rami neri ($E <$

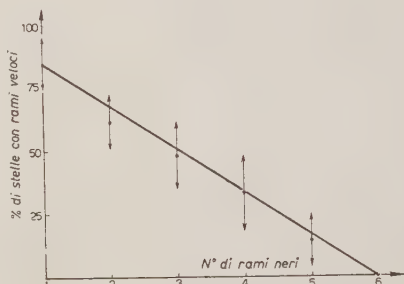


Fig. 2.

> 30 MeV) e veloci ($E > 30$ MeV) per stella e la distribuzione dei rami veloci, sono dati nella Tab. II, dove per confronto sono riportati i risultati relativi ai protoni di 350-400 MeV ⁽²⁾. In fig. 1 è data la percentuale delle stelle in funzione del numero dei rami neri e in fig. 2

compreso fra 150° e 180° , si trova che oltre il 50% dei rami neri ha una distribuzione isotropa.

Anche nell'ipotesi estrema che tutti i rami neri provenienti dalla disintegrazione di nuclei leggeri siano proiettati in avanti rispetto al verso dei protoni inci-

TABELLA II.

N. di rami veloci	0	1	2	3	4
% di stelle (240 MeV)	38 ± 5	50 ± 6	12 ± 3	0	0
% di stelle (350-400 MeV)	35 ± 3	54 ± 4	9 ± 2	$1,7 \pm 0,7$	0
N. medio di rami neri per stella .	$2,5 \pm 0,16$ (240 MeV) $3,1 \pm 0,15$ (350-400 MeV)				
N. medio di rami veloci per stella	$0,72 \pm 0,08$ (240 MeV) $0,77 \pm 0,08$ (350-400 MeV)				

la percentuale delle stelle con almeno un ramo veloce in funzione del numero dei rami neri; queste curve non si discostano molto dalle analoghe ottenute da BERNARDINI *et al.* ⁽²⁾.

La distribuzione angolare dei rami delle stelle è stata determinata misurando l'angolo formato fra la direzione dei protoni incidenti e la proiezione dei rami sul piano della lastra; sia per i rami veloci che per i rami neri, i risultati non si discostano da quelli ottenuti col normale esame per area ⁽¹⁾.

Nell'ipotesi che si possa estendere ad ogni intervallo angolare il contributo isotropo corrispondente all'ultimo intervallo

denti, si può dire che approssimativamente il 30% dei rami neri da disintegrazione dei nuclei pesanti ha un'origine diversa da quella puramente evaporativa.

Maggiori particolari con la discussione dei risultati saranno dati in una prossima nota.

Desidero esprimere la mia più viva gratitudine al Dr. M. D. RITSON per un vantaggioso scambio epistolare; ringrazio inoltre il Prof. G. FRONGIA per il suo costante interessamento e i Proff. G. SALVINI e P. CALDIROLA per alcune utili discussioni.

Radioactivité α Spécifique des Plaques Ilford pour Recherches Nucléaires.

S. DEUTSCH

*Laboratoire de Physique Nucléaire, Faculté des Sciences Appliquées
Université Libre de Bruxelles*

E. C. DODD

Ilford Research Laboratory - London

(ricevuto il 19 Aprile 1953)

Il est bien connu que l'activité spécifique α des plaques nucléaires limite la possibilité de mesurer des activités α très faibles par cette méthode.

Cette contamination se compose des α venant du verre, de ceux venant de l'extérieur, et de ceux de l'émulsion proprement dite. Nous avons cherché plus spécialement à réduire dans les plaques Ilford C₂ le background d' α de l'émulsion.

Les essais de purification effectués au laboratoire de recherches d'Ilford ont porté sur la gélatine et l'eau, laissant de côté pour le moment la purification de AgBr.

Une première série d'observations a été faite sur les trois émulsions expérimentales C₂ suivantes, coulées en plaques de 100 μ d'épaisseur:

Z 5484: émulsion C₂ standard.

Z 5485: émulsion C₂ faite avec la gélatine déminéralisée (« Deashed Gelatin » de la Firme C. Simeons et Co. Ltd).

Z 5486: même émulsion que Z 5485, mais lavée à l'eau distillée.

Une deuxième série d'observations a porté sur les émulsions expérimentales C₂ suivantes, coulées en plaques de 300 μ d'épaisseur:

Z 6112: émulsion identique à Z 5486.

Z 6113: émulsion préparée à partir de la gélatine « deashed » ayant subi une nouvelle purification par lavage à bas pH.

Toutes ces plaques ont été conservées, gélatine contre gélatine, pendant 4 mois à basse température et développées à l'amidol suivant la méthode à deux températures.

Les résultats de l'examen microscopique sont rassemblés dans le tableau I. L'erreur statistique est inférieure à 10%, le nombre d' α comptés pour chaque mesure étant supérieur à 100.

TABLEAU I. — Radioactivité α des émulsion Ilford C₂.

	Surface $\alpha/\text{cm}^2/\text{j}$ 1	Émulsion évts/cm ³ /j 2	Verre $\alpha/\text{cm}^2/\text{j}$ 3
Z 5484 Standard	0,4	42 ± 4 { 28,5 (I) 11 (III + IV) 2,5 (V)	4,3
Z 5485 Gel. purifiée	0,3	31 ± 3 { 16 (I) 14 (III + IV) 1 (V)	2,6
Z 5486 Gel. purifiée eau distillée	0,3	19 ± 2 { 14,5 (I) 3,5 (III + IV) 1 (V)	4,2
Z 6112 Gel. purifiée eau distillée	0,2	29 ± 3 { 23 (I) 5,5 (III + IV) 0,5 (V)	4,1
Z 6113 Gel. 2 x purifiée eau distillée	0,2	23 ± 3 { 19 (I) 3,7 (III + IV) 0,3 (V)	3,1

1 activité superficielle: nombre d' α par cm² et par jour ayant une extrémité à la surface de l'émulsion.

2 nombre d'événements dans l'émulsion par cm³ et par jour, détaillés en traces simples (I) et étoiles à 3 et 4 branches (III + IV) et étoiles à 5 branches (V). Un événement correspond à un α isolé ou à une étoile de désintégrations successives.

3 nombre d' α provenant du verre par cm² par jour. On a calculé le nombre d' α sortant de l'émulsion et on l'a soustrait du nombre total d' α ayant une extrémité dans le verre.

Conclusions.

Purification. — La distinction entre traces isolées et traces en étoiles donne des indications sur la nature des radio-éléments contaminants:

On sait que pour une exposition de l'ordre de 4 mois (¹), U, Th, Po se présentent uniquement en traces isolées, 95% du RdTh en étoiles à 5 branches, (le restant en étoiles à 4 branches), 100% du Ra en étoiles à 4 branches à condition que le Rn n'ait pas diffusé

dans la gélatine. En fait, à cause de cette diffusion, une certaine proportion de Ra donne lieu à une trace isolée plus une étoile à 3 branches. C'est pourquoi nous avons groupé les étoiles à 3 et 4 branches dans le tableau I.

L'examen de la première série de plaques montre que la purification de la gélatine entraîne surtout l'élimination des éléments en traces isolées et abaisse de 20% le nombre d' α ; l'emploi de l'eau distillée abaisse encore de 30% le background, éliminant principalement le Ra; le nombre d'étoiles à 3 et 4 branches diminue d'un facteur 3 alors que celui,

(¹) R. FLAMENT: *Bulletin du Centre de Physique Nucléaire de l'U.L.B.*, n. 3, Août 1948.

très faible, des étoiles à 5 branches du RdTh ne varie pas sensiblement.

La deuxième série de plaques montre que la seconde purification de la gélatine n'apporte pas de gain appréciable.

On remarquera qu'il y a une différence de 30% dans la contamination des plaques Z 5486 et Z 6112 préparées à partir de la même gélatine.

Au total, le background d' α des émulsions à gélatine purifiée est réduit d'un

facteur 2 seulement par rapport aux émulsions standard.

On peut espérer obtenir un gain plus appréciable en purifiant les produits servant à la préparation des halogénures d'argent. Cependant, il faut remarquer que la concentration des radioéléments α dans l'émulsion est déjà très faible par rapport au niveau habituel de contamination des produits chimiques « purs » (voir tableau II).

TABLEAU II. — Répartitions des radioéléments dans les émulsions Ilford C₂:
Z 6113, Z 5484.

	Ra g/cm ³ d'émul. sèche	Th g/cm ³	RdTh g/cm ³	U g/cm ³	Po g/cm ³	Th du verre g/g
Z 6113 gel. 2 × pur.	$> 1,2 \cdot 10^{-15}$	$0,8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-19}$	$< 10^{-8}$	$< 1,4 \cdot 10^{-18}$ ($7 \cdot 10^{-13}$ C)	$1 \cdot 10^{-6}$
Z 5484 standard	$> 3,5 \cdot 10^{-15}$	$7 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-19}$	$< 1,4 \cdot 10^{-8}$	$< 2 \cdot 10^{-18}$ (10^{-12} C)	$1,2 \cdot 10^{-6}$

Activité superficielle. — L'activité superficielle se compose des α sortant de l'émulsion et de ceux venant de l'extérieur. En calculant d'après l'activité de l'émulsion le nombre d' α sortant par la surface ⁽²⁾ on peut voir qu'il ne représente qu'environ 10% des α de surface, les 90% restants doivent venir de l'extérieur; ils sont probablement dus à la teneur normale en Rn de l'air et aux poussières déposées pendant la fabrication. Cette activité superficielle correspond à celle d'un échantillon épais contenant $5 \cdot 10^{-8}$ g de Th par g ou $1,5 \cdot 10^{-8}$ g d'U par g (en supposant le Th et l'U en équilibre) ce qui donne une limite inférieure aux activités des échantillons solides mesurables par cette méthode.

Estimation des teneurs en radioéléments α . — Les résultats des comptages permettent également d'évaluer les concentrations des radioéléments contaminants dans l'émulsion, à savoir:

1) une limite inférieure de celle du Ra d'après le nombre d'étoiles à 3 et 4 branches, la valeur réelle étant plus grande par suite de la perte d'une partie du Rn ⁽³⁾.

2) du RdTh, en lui attribuant toutes les étoiles à 5 branches, la contribution de l'actinium étant négligeable;

3) du Th, calculé en supposant qu'il est en équilibre avec le RdTh;

4) une limite supérieure de la concentration de l'U et du Po en leur attribuant successivement toutes les traces iso-

⁽²⁾ R. D. EVANS: *Phys. Rev.*, **45**, 1, 29 (1934);
I. CURIE: *Journ. Phys. et Ra.*, **7**, n. 11 (1946).

⁽³⁾ W. SCHNEIDER et T. MATITSCH: *Mitt. des Instituts f. Radiumforschung*, n. 488 (Wien, 1952).

lées. On pourrait au besoin les différencier par une mesure des longueurs des traces.

Activité du support. — On a également calculé l'activité du verre, en g de Th par g, en supposant que la radioactivité α du verre n'est due qu'au Th. Dans la plupart des applications, cette activité du verre n'est pas gênante à condition d'utiliser des émulsions d'épaisseurs supérieures à 50μ ; toutefois, la contamination du support pourrait être réduite en utilisant d'autres matières que le verre (quartz, plastic, ...).

On a groupé ces estimations dans le tableau II.

Ainsi cette détermination de la contamination précisera les limites d'emploi des plaques nucléaires actuelles dans la recherche de nouvelles radioactivités α de longues périodes et dans l'évaluation des quantités minima de radioéléments α décelables par cette méthode.

Ce travail a été dirigé par Mr. E. PICCIOTTO de l'Université Libre de Bruxelles et Mr. C. WALLER de Ilford Limited. Nous les remercions ici ainsi que le Professeur G. P. S. OCCHIALINI et la Firme Ilford Limited pour leurs conseils et précieuse coopération.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

ARNOLD L. REIMANN — *Vacuum Technique*. Chapman and Hall Limited, Londra, 1952, pag. 449.

Tra le tecniche che oggi vengono impiegate nel campo delle scienze sperimentali quella dell'alto vuoto è una delle più diffuse: in tutti i laboratori di ricerche fisiche, chimiche, biologiche e nell'industria è molto spesso necessario avere impianti per ottenere basse e bassissime pressioni in recipienti di dimensioni più o meno grandi.

Questa speciale tecnologia che si è notevolmente sviluppata negli ultimi tempi, viene trattata di solito in manuali e libri diversi, in alcuni dal lato prettamente scientifico in altri invece da quello pratico-applicativo.

Il libro di A. L. REIMANN, da poco pubblicato e che si aggiunge ad altri esistenti, si propone lo scopo non solo di descrivere in forma piana le apparecchiature più moderne e di dare consigli pratici per il loro impiego, ma soprattutto anche, di prospettare ed in parte risolvere i diversi problemi di carattere teorico che si presentano nella progettazione di tali impianti.

Dopo un capitolo introduttivo, il secondo è dedicato al calcolo e alla misura della velocità di pompaggio in relazione alla resistenza delle tubature.

Successivamente vengono descritti in maniera chiara e facile, con l'ausilio di illustrazioni e diagrammi, i vari tipi di pompe: da quella classica rotativa a quella a diffusione ad uno o più stadi, sia ad Hg che ad olio: molto utile in questo campo la discussione sulle pompe a vapore di olio con autofrazionamento

realizzate da HIEKMAN e MCCOWEN attorno al 1936, con le quali viene evitato l'inconveniente di dovere cambiare molto spesso l'olio della pompa.

Dal capitolo VIII fino al XI l'A. tratta dei materiali impiegati negli impianti per il vuoto: primo fra tutti il vetro.

Qui in verità si intrattiene forse un po' troppo sull'argomento; c'è difatti un ampio resoconto circa le proprietà, il trattamento e la manipolazione del vetro, di particolare importanza è comunque quella parte che riguarda i gas disciolti nel vetro e le saldature vetro-metallo oggi tanto impiegate nei laboratori. Trattando poi dei vuoti molto spinti 10^{-6} , 10^{-7} mm Hg l'A. si intrattiene sui processi attraverso i quali i gas residui vengono intrappolati dai materiali con cui stanno a contatto: processi di natura chimica, assorbimento, soluzione. Sono passati in rassegna tutte le principali sostanze impiegate a questo scopo, in particolare i metalli.

Alla fine chiude il volume un capitolo sulla misura delle pressioni. Sono descritti parecchi tipi di manometri, dal semplice tubo ad U al McLeod in tutte le varietà proposte, e a quelli che sfruttano la scarica nei gas (dai semplici tubi per misure semiquantitative ai moderni Philips con campo magnetico).

Una chiara descrizione illustra il funzionamento dei manometri tipo Pirani e di quelli più recenti «a ionizzazione» dei quali sono presentati con disegni costruttivi molto schematici, ma utili, alcuni tipi più usati.

In complesso il libro riesce utile a quanti lavorano nei laboratori di ricerca,

la sua forma piana ed elementare permette la lettura anche ad un bravo tecnico, al quale di preferenza il libro si rivolge: in ciò si risente la lunga esperienza dell'A. che lavorò in questo campo per diversi anni presso i laboratori della General Electric Company.

Le numerose note bibliografiche che accompagnano ogni capitolo sono riportate con cura, esse sono ben aggiornate e riescono di grande utilità al lettore interessato all'argomento.

M. SANTANGELO

G. GIORGI, G. MADIA - *Elettrotecnica Generale per Istituti Industriali*. Torino, Società Editrice Internazionale, 1951, pp. xv-387.

In questo libro i fatti e le leggi generali dell'elettrotecnica vengono trattati in modo piuttosto esteso e completo.

Seguendo l'indirizzo oggi più in voga, la trattazione comincia dallo studio delle correnti anziché dell'elettrostatica, il che può avere dei vantaggi in un corso volto piuttosto alle applicazioni pratiche che all'approfondimento dei concetti fisici. Lo studio dei circuiti in corrente continua occupa i primi quattro capitoli. Un aspetto simpatico di essi, che si ritrova più o meno in tutto il libro, è il continuo riferimento a esempi pratici e dati numerici che rende più concreta l'esposizione.

Il cap. V descrive i fenomeni reattivi nei circuiti. Mentre può essere una buona cosa per dei tecnici introdurre per questa via il concetto di *capacità*, ci sembra meno felice l'idea di introdurre similmente quello di *induttanza* (pag. 79), molto prima di aver spiegato l'induzione elettromagnetica, ciò che vien fatto soltanto a pag. 265, nel penultimo capitolo (XV).

L'argomento delle correnti alternate (o variabili) è trattato, giustamente con

una certa relativa ampiezza, nei capp. VI, VII, VIII.

L'uso abbastanza esteso dei numeri complessi è da lodare, anche se la loro introduzione in modo un po' formale e succinto richiederà una certa attenzione da parte dell'insegnante.

Similmente è da lodare l'uso corrente dei concetti di derivata e di integrale (non è il caso di dire del calcolo infinitesimale) e di alcuni elementi del calcolo vettoriale.

La 2ª parte del libro (capp. X-XVI) riguarda i «campi» (invece dei «circuiti»), quindi: elettrostatica, magnetismo, elettromagnetismo, propagazione (linee, onde). Notevole è lo sforzo per dare in modo elementare un'idea corretta, tanto per fare un esempio, delle relazioni fra **E** e **D** da un lato e **B** ed **H** dall'altro, argomenti sempre assai delicati anche in trattazioni a un livello superiore.

In genere si può dire che gli argomenti sono trattati meglio proprio quanto più sono delicati. Se e quanto si sia poi raggiunto di efficacia didattica, è un altro discorso. Molto dipenderà dall'insegnante (il libro non è fatto per quelli avvezzi a lasciare che il testo «insegna da sé»).

Una trentina di pagine di utili tabelle e circa 40 esercizi (oltre a numerosi esempi numerici annessi ai vari capitoli) completano il volume.

Ed ora, per chiudere, ci sia permesso di segnalare alcune fra le imperfezioni «locali» che sarebbe bene sparissero dalle successive edizioni di un libro che porta una firma così cospicua.

A pag. 30 si legge che la d.d.p. di un milione di volt è stata realizzata per la disintegrazione d'atomo con bombardamento elettronico. A parte che i van de Graaff raggiungono tensioni anche parecchio superiori, quel bombardamento elettronico sembra piuttosto strano.

A pag. 143 la descrizione dell'effetto Volta lascia perplessi. Eccola testualmente. «Due corpi metallici eterogenei fra loro messi a contatto presentano

sempre un'elettrizzazione eguale e di segno contrario sulle due superfici a contatto. Si dice allora che un campo elettrico si determina nel sottile strato di dielettrico che separa i due metalli... ».

A pag. 203 il funzionamento del galvanometro balistico (in una misura di flusso) è così commentato: « Qualunque di queste operazioni deve essere fatta in modo subitaneo, perchè il campo non possa variare nel frattempo, e l'indicatore galvanometrico non abbia intanto da assumere una posizione deviata, in

cui la costante di proporzionalità dello strumento potrebbe essere differente ».

A pag. 234 ci sembra pretendere troppo dalla « metrologia nuova » volere che « la formula " classica " $\mu = 1 + 4\pi\kappa$ debba oggi essere scritta (formula (37)) $\mu = \mu_0\kappa$ ».

A pag. 288 si afferma che uno schermo elettromagnetico è tanto più efficace quanto più la frequenza è *elevata*, ma che l'effetto schermante è completo soltanto contro le azioni *elettrostatiche*.

S. FRANCHETTI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 23-V-1953